

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES COMPLEJAS.

CARLOS EDUARDO DÍAZ AGUILERA.



**UNIVERSIDAD DEL VALLE.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
EXACTAS.
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS.
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DEL 2015.**

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES COMPLEJAS.

CARLOS EDUARDO DÍAZ AGUILERA.

carlos.diaz.aguilera@correounivalle.edu.co

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático.**

**Director: JUAN MIGUEL VELÁSQUEZ SOTO,
PhD.**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
EXACTAS.**

**PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS.
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DEL 2015.**

UNIVERSIDAD DEL VALLE.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
EXACTAS.
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DEL 2015.

Carlos Eduardo Díaz Aguilera.

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE
SEMISIMPLES COMPLEJAS.

TEMAS Y PALABRAS CLAVES Álgebra de Lie -
Álgebra de Lie semisimple - Álgebra de Lie simple - Diagramas
de Dynkin - Forma de Killing - Matriz de Cartan - Matriz de
Gram - Raíces indescomponibles - Raíces simples -
Representación adjunta - Retículos de raíz - Sistema fundamental
de raíz - Sistema de raíces - Subálgebra de Cartan.

Notas de aprobación

El trabajo de grado titulado “CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES COMPLEJAS”, presentado por el estudiante Carlos Eduardo Díaz Aguilera, para optar al título de Matemático, fue revisado por el jurado y calificado con:

Recomendación de meritoria.

Juan Miguel Velásquez Soto PhD.

Director.

Alexander Quintero PhD.

Jurado.

Agradecimientos.

Agradezco a todos los que han hecho posible la realización de este trabajo: la Universidad del Valle, el Departamento de Matemáticas y los profesores que participaron activamente en mi formación académica.

Agradezco especialmente a mi asesor Juan Miguel Velásquez, quien además de orientar los lineamientos del trabajo, también fue un gran pilar en mi formación académica, logrando incentivar la confianza en mi mismo como matemático; logró explotar una gran parte de mi potencial; me mostró la importancia de otros valores en mi formación como la constancia, la perseverancia, la paciencia y la resistencia ante el fracaso como parte esencial para hacer matemáticas. Por esto y más, lo considero un buen amigo.

También, destaco mi agradecimiento a los profesores del Departamento: Guillermo Restrepo y Miguel Marmolejo, quienes tienen mi profunda admiración y me acogieron en su seminario de análisis funcional y probabilidad, abriéndome las puertas a conocer problemas de interés actual en estas áreas y aumentando mi curiosidad por ahondar en los conocimientos básicos generales con un nivel mayor de atención; al profesor Guillermo Ortiz, en calidad de director de programa del pregrado en matemáticas quien me facilitó la organización y la coordinación del seminario de estudiantes y proporcionó mucha información en temas muy curiosos y a la profesora Ana María Sanabria quien motivó e incentivó en gran parte mi regreso al programa de matemáticas; por eso le profeso gran afecto y gratitud.

Agradezco a mis amigos por acompañarme, escucharme, distraerme y volverme a enfocar en las cosas importantes. En especial, agradezco a Yazmin Rivera por ser parte de gran parte de mi vida, tanto académica como personal; siempre estuvo y está dispuesta a brindarme su apoyo incondicional. A Diana Ximena, Luz Elena, Andrea Vanessa, Abraham, Erik, Jhon V, quienes me brindaron un ambiente más agradable en mi paso por la academia, por compartir muchos momentos agradables y subirme el ánimo en varias ocasiones. Agradezco a William Delgado, un amigo muy especial quien desde mi infancia ha puesto todo de su parte para que pueda cumplir mis metas; me ha dado consejo y su invaluable amistad.

Finalmente, agradezco a mi madre y a mi padre por su apoyo, comprensión, amor, paciencia, dedicación y demás detalles que hacen de pilar, bastón y horizonte en mi vida. Gracias por dedicar todos sus esfuerzos en mi futuro, en mi formación y en mi todo; los quiero muchísimo y éste trabajo es dedicado a ustedes porque es el fruto de su perseverancia y tenacidad.

Carlos Eduardo Díaz Aguilera.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	II
Resumen	III
Introducción	1
1. Clasificación de los retículos de raíz	1
1.1. Definiciones y ejemplos	1
1.2. Retículos de raíz y su clasificación	3
2. Clasificación de las Álgebras de Lie semisimples complejas	13
2.1. Definiciones y ejemplos	13
2.2. Álgebras de Lie especiales, generación y los teoremas de isomorfismos . . .	16
2.3. La representación adjunta y la forma de Killing	19
2.4. Álgebras de Lie nilpotentes, solubles y semisimples	22
2.5. Álgebra lineal y su relación con las álgebras de Lie nilpotentes	29
2.6. Subálgebras de Cartan y sistemas de raíces	30
2.7. Sistemas abstractos de raíces y su clasificación	39
Conclusiones	52
Bibliografía	54

Índice de figuras

1.1. Retículo A_2 en \mathbb{R}^2	3
1.2. Asignación de aristas para el diagrama de Coxeter-Dynkin.	6
1.3. Ciclo de r vértices.	7
1.4. Grafo de cuatro hojas no contenido en un diagrama de Coxeter-Dynkin. . .	7
1.5. Forma general de un diagrama de Coxeter-Dynkin conexo.	9
1.6. Posibles diagramas de Coxeter-Dynkin conexos.	10
2.1. Diagrama de Dynkin correspondiente a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	34
2.2. Grafos no contenidos en un diagrama de Dynkin.	48
2.3. Posibles diagramas de Dynkin.	48

Resumen

En este trabajo abordaremos la clasificación de dos objetos, los retículos de raíz y las álgebras de Lie semisimples complejas. A lo largo del mismo se evidenciará que a pesar de que son objetos de naturaleza matemática distinta, los pasos a seguir en su clasificación son esencialmente los mismos.

Primero abordaremos la clasificación de los retículos de raíz, para lo cual seguimos [WE]. Mientras que la de las álgebras de Lie semisimples complejas la haremos siguiendo [J] y [Wi].

Es de destacar, que el presente documento es esencialmente autocontenido, algunas pruebas se dejan para que el lector las consulte pues las mismas se alejan demasiado del interés general del trabajo.

Introducción

Las álgebras de Lie están sujetas actualmente a investigación exhaustiva por sus aplicaciones a la ingeniería (Sistemas Dinámicos, etc), a la física (Mecánica Cuántica, estudio de simetrías, Teoría de Supercuerdas, etc), a las matemáticas aplicadas (Ecuaciones Diferenciales, etc) y las matemáticas discretas.

En el año 1873, Sophus Lie dio origen a las ideas que conformaron la denominada *Teoría de Lie*, la cual ha recibido aportes posteriores de Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Serre, entre otros. En los primeros trabajos de Lie, la idea subyacente era construir una teoría de “grupos continuos”, que complementara la teoría de grupos discretos que ya existía. La aplicación inicial que Lie tenía en mente era las ecuaciones diferenciales; él observó que las simetrías de una ecuación diferencial dan lugar a unos grupos con parámetros, que hoy conocemos como *grupos de Lie*. Si bien continuó su rumbo en otra dirección, la teoría de Lie juega un papel central en el desarrollo de la matemática contemporánea y por ello vale la pena estudiarla.

Por otro lado, cuando se estudian retículos Euclidianos, en especial los retículos de raíz, llama la atención que en gran parte de la literatura se “eluda” el clasificar dichos retículos, haciendo referencia a la clasificación de las álgebras de Lie semisimples, como en [CS], que comienza definiendo sistemas de raíces para álgebras de Lie y grupos de reflexiones. Esto causa bastante curiosidad y amerita revisarlo.

Encontramos que Wolfgang Ebeling en [WE] hace una clasificación detallada de los retícu-

los de raíz, definiendo los conceptos de sistemas de raíces, sistema fundamental de raíces, *diagramas de Coxeter-Dynkin* y presentando un teorema que garantiza que el método es aplicable y otros que clasifican los diagramas mencionados, para finalmente presentar la clasificación los retículos basado en los resultados obtenidos anteriormente. Un objetivo es comparar éste método con el que usaremos para clasificar las álgebras de Lie semisimples complejas.

Capítulo 1

Clasificación de los retículos de raíz

1.1. Definiciones y ejemplos

Un *retículo euclídeo* m -dimensional es un subconjunto Γ de \mathbb{R}^n formado por todas las combinaciones lineales enteras de m vectores linealmente independientes. En símbolos esto es:

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{e}_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

donde $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ es un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n , llamado una *base* del retículo; es claro que si $m = n$, $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n . En este caso decimos que Γ es de *dimensión* o *rango completo*; no hay pérdida de generalidad al suponer que todos los retículos son de rango completo.

Si Γ es un retículo de rango completo y $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es una base, entonces $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ también es base de Γ si y sólo si existe una transformación entera, $U \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$, tal que para todo $1 \leq i \leq n$ se cumple $U\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$.

Además si,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}), \\ \mathbf{e}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn}),\end{aligned}$$

son las coordenadas de los vectores de B en una base de \mathbb{R}^n , que usualmente es la base canónica, la matriz

$$M := \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

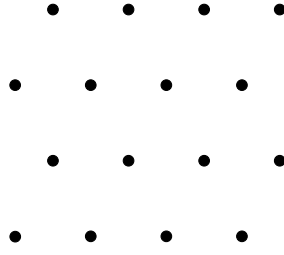
se llama *matriz generadora* del retículo. En este sentido, tenemos que $\mathbf{y} \in L$ si y sólo si, existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}M.$$

Se define la *matriz de Gram* del retículo por $A = MM^t$, nótese que la entrada (i, j) de A es el producto interno $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

Ejemplo 1.1.1.

1. El retículo cúbico en \mathbb{R}^n , \mathbb{Z}^n cuya base es la base canónica de \mathbb{R}^n .
2. El retículo $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Una base para A_2 es $\{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}$. Figura 1.1

Figura 1.1: Retículo A_2 en \mathbb{R}^2 .

1.2. Retículos de raíz y su clasificación

Un retículo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ se dice *entero* si todos los $x, y \in \Gamma$ cumplen que $x \cdot y \in \mathbb{Z}$, y un retículo entero se llama *par* si cada elemento x de Γ es tal que $x \cdot x = x^2 \in 2\mathbb{Z}$, es decir, la norma al cuadrado de cada elemento de Γ es par.

Consideremos el conjunto $R := \{x \in \Gamma | x^2 = 2\}$. Un elemento de este conjunto se llama una *raíz*. Así, un retículo par Γ es un *retículo de raíz* si R genera a Γ .

Observación 1.2.1. Sea Γ un retículo de raíz. Si $x, y \in R$ entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos $(x \cdot y)^2 \leq x^2 y^2 = 4$, obteniendo que $x \cdot y \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Además, $x \cdot y = \pm 2$ si y sólo si $x = \pm y$, y $x \cdot y = 1$ si y sólo si $x - y$ es una raíz.

Sabemos que el sistema de raíces R de un retículo de raíz Γ , es un conjunto generador para Γ , así decimos que un subconjunto S de R es un *sistema fundamental* de raíces si cumple las siguientes condiciones:

- (i) S es una base de Γ .
- (ii) Cada $\beta \in R$ se puede escribir como combinación lineal

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} k_{\alpha} \alpha$$

con coeficientes enteros k_{α} todos no negativos o todos no positivos.

De la Observación 1.2.1, en un sistema fundamental de raíces S de un retículo de raíz Γ , si $\alpha, \beta \in S$, entonces $\alpha \cdot \beta \in \{-1, 0\}$, pues si $\alpha \cdot \beta = \pm 2$, se tiene $\alpha = \pm \beta$, contradiciendo

(i) y si $\alpha \cdot \beta = 1$ entonces $\alpha - \beta$ es una raíz, lo que contradice (ii). Luego un sistema fundamental de raíces S es una base de Γ , $\{\mathbf{e}_i | i = 1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{e}_i^2 = 2$ y $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \in \{-1, 0\}$.

Ahora probaremos que todo retículo de raíz $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ contiene un sistema fundamental de raíces. Para esto primero notemos que considerando R el sistema de raíces del retículo Γ , existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $t \cdot \alpha \neq 0$ para todo $\alpha \in R$. En efecto, en cada bola cerrada $\overline{B}(0, r)$, $r > 0$, hay finitos elementos de Γ para cada r , en particular en su frontera, luego existen finitos $\alpha \in R$.

Si consideramos el hiperplano que tiene a $\alpha \in R$ como vector normal $\Pi_\alpha = \{x \cdot \alpha = 0\}$, hay finitos de estos hiperplanos, y la unión finita de hiperplanos no agota \mathbb{R}^n . Por lo tanto existe $t \in \mathbb{R}^n$ como afirmamos.

Para un t como el expuesto anteriormente, definimos $R_t^+ = \{\alpha \in R | t \cdot \alpha > 0\}$. Entonces se tiene que $R = (R_t^+) \cup (-R_t^+)$, puesto que si α es una raíz, $-\alpha$ también lo es. Definimos R_t^+ para dar una noción de “positividad” a las raíces pues si $\alpha \in R$, entonces $\alpha \in R_t^+$ o $-\alpha \in R_t^+$ y un elemento $\alpha \in R_t^+$ se dice *descomponible* si existen $\beta, \gamma \in R_t^+$ tales que $\alpha = \beta + \gamma$. En caso contrario se dice que α es *indescomponible*. Por S_t denotamos el conjunto de los elementos indescomponibles de R_t^+ .

Ahora veamos unas propiedades interesantes sobre el conjunto S_t por medio de los siguientes lemas.

Lema 1.2.2. *Cada elemento de R_t^+ es una combinación lineal de elementos de S_t con coeficientes enteros no negativos.*

Para probar el lema, procedamos por contradicción suponiendo que existe $\alpha \in R_t^+$ que no cumple la propiedad del enunciado. Como $t \cdot \beta > 0$ para todo $\beta \in R_t^+$, podemos tomar α tal que $t \cdot \alpha$ es mínimo. Ahora bien, α es descomponible pues si no lo fuera, sería un elemento de S_t y se escribiría de manera inmediata con los coeficientes no negativos. Por lo tanto $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma \in R_t^+$. Ahora multiplicando por t , tenemos:

$$t \cdot \alpha = t \cdot \beta + t \cdot \gamma.$$

Como $t \cdot \beta > 0$ y $t \cdot \gamma > 0$, tanto $t \cdot \beta$ como $t \cdot \gamma$ son menores que $t \cdot \alpha$ y por tanto se pueden escribir como combinación lineal de los S_t con escalares todos no negativos, lo que significa que α tiene esta escritura también, y se contradice la escritura de α .

Observación 1.2.3. Este lema nos dice que cualquier elemento de R se puede escribir como combinación lineal de elementos de S_t con coeficientes enteros todos no negativos o no positivos, y por tanto S_t genera a Γ .

Lema 1.2.4. $\alpha \cdot \beta \leq 0$ para todos $\alpha, \beta \in S_t, \alpha \neq \beta$.

En efecto, no puede darse $\alpha \cdot \beta = \pm 2$, pues $\alpha = \pm \beta$ pero $\alpha = -\beta$ no puede darse en R_t^+ y por tanto tampoco en S_t . Si $\alpha \cdot \beta > 0$ entonces $\alpha \cdot \beta = 1$ y así $\gamma = \alpha - \beta \in R$. Entonces se tiene que $\gamma \in R_t^+$ o $-\gamma \in R_t^+$. En el primer caso $\alpha = \beta + \gamma$ sería descomponible, en el segundo caso $\beta = \alpha + (-\gamma)$ sería descomponible. Ambos casos son contradicciones, luego $\alpha \cdot \beta \leq 0$.

Observación 1.2.5. Este lema es bastante importante ya que nos muestra cómo son los productos internos de los elementos en S_t , concluyendo que si $\alpha, \beta \in S_t, \alpha \neq \beta$, entonces $\alpha \cdot \beta \in \{-1, 0\}$.

Lema 1.2.6. *Los elementos de S_t son linealmente independientes.*

Supongamos que $\sum_{\alpha \in S_t} a_\alpha \alpha = 0$. Esta suma se puede separar en dos, la parte negativa y la parte positiva, entonces se puede escribir como

$$\sum b_\beta \beta = \sum c_\gamma \gamma$$

donde $b_\beta, c_\gamma > 0$ y tanto β como γ corren sobre subconjuntos disjuntos de S_t . Sea $\lambda = \sum b_\beta \beta$; entonces

$$\lambda \cdot \lambda = \sum_{\beta, \gamma} b_\beta c_\gamma (\beta \cdot \gamma) \leq 0,$$

de donde $\lambda = 0$. Así, $0 = t \cdot \lambda = \sum b_\beta(t \cdot \beta)$, por tanto $b_\beta = 0$ para todo β pues $t \cdot \beta > 0$. Similarmente $c_\gamma = 0$ para todo γ y concluimos la prueba.

Este lema es el ingrediente faltante para la siguiente proposición.

Proposición 1.2.7. *El conjunto S_t es un sistema fundamental de raíces.*

Vale la pena resaltar que el recíproco también es cierto, es decir, para un sistema fundamental de raíces, sus elementos son los indescomponibles para algún $t \in \mathbb{R}^n$. Además, hemos probado que todo retículo de raíz contiene un sistema fundamental de raíces, y por tanto una base para la cual la matriz de Gram del retículo Γ tiene como entradas

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij} \in \{-1, 0\}, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

A una matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ simétrica con estas características se le puede asociar un grafo de tal forma que cada fila o columna corresponde a un vértice del grafo y los vértices i y j se conectan por medio de una arista si $a_{ij} = -1$. Este grafo se llama *Diagrama de Coxeter-Dynkin*.

Luego podemos asociarle a un retículo de raíz un grafo de esta forma por medio de su matriz de Gram. A los vértices lo notaremos por $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$, donde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es una base que permite esta asociación. Los vértices \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j se conectan si $a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -1$, esta asignación se muestra en la Figura 1.2.

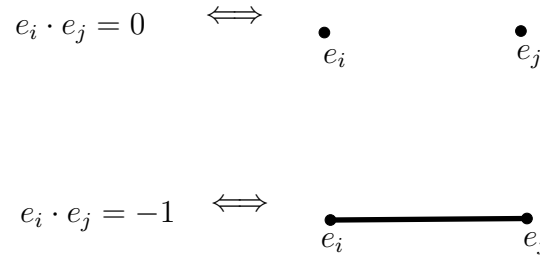


Figura 1.2: Asignación de aristas para el diagrama de Coxeter-Dynkin.

Resulta que podemos clasificar los retículos de raíz por medio de los diagramas de Coxeter-Dynkin. Estudiaremos a continuación estos diagramas.

Sea G el diagrama de Coxeter-Dynkin correspondiente a la matriz de Gram asociada a la base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ del retículo de raíz Γ .

Lema 1.2.8. G no contiene ciclos, ver Figura 1.3, donde $x_1, x_2, \dots, x_r, r \geq 3$ denotan los vectores correspondientes de la base.

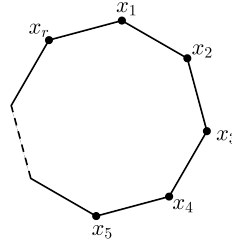


Figura 1.3: Ciclo de r vértices.

Si G contiene un ciclo, entonces $(x_1 + \dots + x_r)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j = 2r - 2r = 0$, lo que contradice la independencia lineal de los x_i -es.

Lema 1.2.9. G no contiene un grafo de cuatro hojas como el de la Figura 1.4.

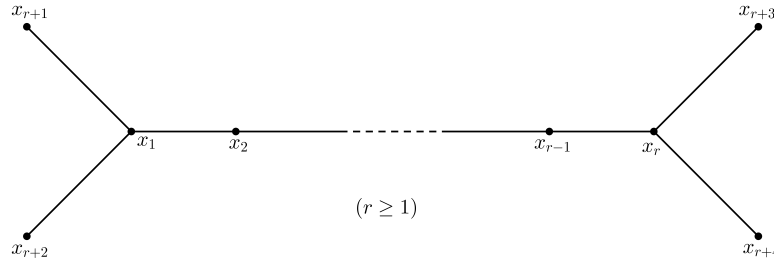


Figura 1.4: Grafo de cuatro hojas no contenido en un diagrama de Coxeter-Dynkin.

Si suponemos que G contiene un grafo de éste tipo, tendríamos que

$$\begin{aligned}
& (2x_1 + \cdots + 2x_r + x_{r+1} + x_{r+2} + x_{r+3} + x_{r+4})^2 \\
&= 4 \left(\sum_{i=1}^r x_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^r 2x_i \cdot \sum_{j=r+1}^{r+4} x_j + \left(\sum_{i=r+1}^{r+4} x_i \right)^2 \\
&= 4 \left(\sum_{i=1}^r x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_i \cdot x_j \right) + 4 \sum_{i=1}^r x_i \cdot \sum_{j=r+1}^{r+4} x_j \\
&\quad + \sum_{i=r+1}^{r+4} x_i^2 + 2 \sum_{r+1 \leq i < j \leq r+4} x_i \cdot x_j \\
&= 4(2r - 2(r-1)) - 16 + 8 - 0 \\
&= 8r - 8r = 0
\end{aligned}$$

De nuevo obteniendo que un subconjunto de vectores linealmente independientes generan el cero de manera no trivial.

Concluimos así que si G es un diagrama de Coxeter-Dynkin conexo tiene la forma del grafo en la Figura 1.5, donde los x 's, y 's, z 's y c son los elementos de la base de Γ . Adicionalmente notemos que $x_i \perp y_j$, $x_i \perp z_j$ e $y_i \perp z_i$ para todos i, j . Además si definimos ω por:

$$\begin{aligned}
\omega &= c + \frac{1}{p}[(p-1)x_1 + (p-2)x_2 + \cdots + x_{p-1}] \\
&\quad + \frac{1}{q}[(q-1)y_1 + (q-2)y_2 + \cdots + y_{q-1}] \\
&\quad + \frac{1}{r}[(r-1)z_1 + (r-2)z_2 + \cdots + z_{r-1}],
\end{aligned}$$

es claro que $\{\omega, x_1, \dots, x_{p-1}, y_1, \dots, y_{q-1}, z_1, \dots, z_{r-1}\}$ es un conjunto linealmente independiente pues ω depende de c y se cumple que $\omega \perp x_i$, $\omega \perp y_i$ y $\omega \perp z_i$ para todo i . En efecto:

$$\begin{aligned}
\omega \cdot x_1 &= c \cdot x_1 + \frac{(p-1)x_1^2 + (p-2)x_2 \cdot x_1}{p} = -1 + \frac{p}{p} = 0, \\
\omega \cdot x_i &= c \cdot x_i + \frac{p-i}{p}x_i^2 + \frac{p-(i-1)}{p}x_{i-1} \cdot x_i + \frac{p-(i+1)}{p}x_i \cdot x_{i+1} = 0, \\
\omega \cdot x_{p-1} &= c \cdot x_{p-1} + \frac{1}{p}x_{p-1} \cdot x_{p-1} + \frac{p-(p-2)}{p}x_{p-2} \cdot x_{p-1} = 0.
\end{aligned}$$

La cuenta es idéntica para los y_i 's y z_i 's. Ahora examinaremos el producto $\omega \cdot \omega$,

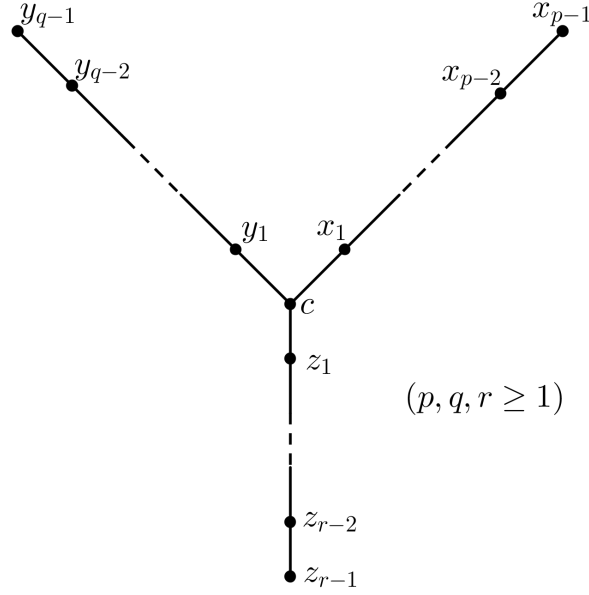


Figura 1.5: Forma general de un diagrama de Coxeter-Dynkin conexo.

$$\omega \cdot \omega = \omega^2 = \omega \cdot c = 2 - \frac{p-1}{p} - \frac{q-1}{q} - \frac{r-1}{r} = -1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Como $\omega^2 > 0$, entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. Queremos buscar las triplas (p, q, r) con $p \leq q \leq r$ enteros positivos que satisfagan la desigualdad. Para $p = 1$, se admiten las soluciones $(1, q, r)$ con $q \leq r$ cualesquiera. Si $p = 2$ y $q = 2$, se tiene $r > 0$ pero por las restricciones, tenemos que las soluciones son $(2, 2, r), r \geq 2$. Si $p = 2$ y $q = 3$, $\frac{5}{6} + \frac{1}{r} > 1$ así $r < 6$, en este caso tenemos un conjunto finito de soluciones, $(2, 3, 3), (2, 3, 4)$ y $(2, 3, 5)$. No hay soluciones para $p = 3$ pues en este caso la suma máxima es igual a 1. En consecuencia tenemos que los posibles Diagramas de Coxeter-Dynkin conexos son los expuestos en la Figura 1.6.

Ahora debemos ver la existencia de un retículo de raíz al que se le pueda asociar cada diagrama de Coxeter-Dynkin, pues en caso de no haber tal retículo para algún diagrama, debemos descartar dicho diagrama. Aunque vale la pena resaltar que en la Figura 1.6 al nombrar los diagramas por tipo sugerimos la existencia del retículo y daremos a continuación los retículos nombrados según el tipo de diagrama que les corresponde.

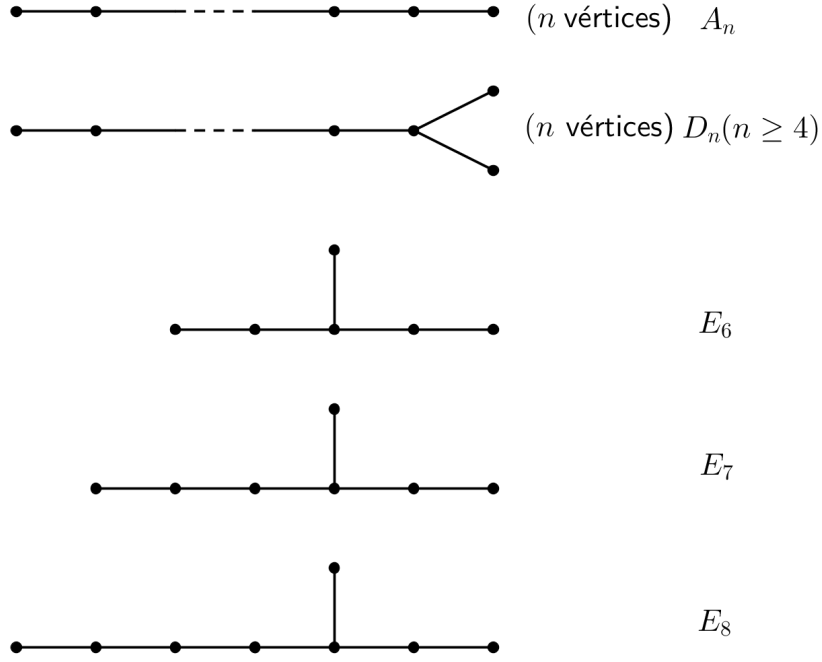


Figura 1.6: Posibles diagramas de Coxeter-Dynkin conexos.

Consideremos el conjunto

$$A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} | x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}.$$

Una base para A_n es $\{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n\}$. Además

$$(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i-1})^2 = 2, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i-1}) \cdot (\mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i) = -1 \text{ y } (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j-1}) \cdot (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i-1}) = 0,$$

siempre que $i \neq j, i \neq j + 1$, donde los \mathbf{e}_i son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Nótese que los productos para ésta base tiene como matriz de Gram una que admite el diagrama de tipo A_n .

Ahora, sea

$$D_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n | x_1 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Una base para D_n es $\{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n\}$. En cuanto a los productos internos para ésta base, notemos que solo hay un vector distinto a los de la base de A_n luego solo basta notar que $(\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n) \cdot (\mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_{n-2}) = -1$ y su producto con los otros vectores es cero. Luego el diagrama de Coxeter-Dynkin es el correspondiente a uno del tipo D_n .

Consideremos los siguientes vectores en \mathbb{R}^8 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1), & \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 0), & \mathbf{e}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1, 0, 1, -1, 0), \\ \mathbf{e}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0, -1, 0, 1, 0), & \mathbf{e}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 0), \\ \mathbf{e}_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 1, 0, 0, -1, 0), & \mathbf{e}_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

calculando los productos internos de ellos obtenemos que $\mathbf{e}_i^2 = 2$ para $i = 1, \dots, 8$; $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_8 = -1$ para $i = 1, \dots, 6$ y todos los demás son iguales a cero. De los valores que toman los productos internos vemos que a este conjunto de vectores se les puede asociar un diagrama de tipo E_8 . También se sigue que son linealmente independientes, y por tanto forman una base para \mathbb{R}^8 , definimos el retículo

$$E_8 := \langle \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_8\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Para construir los retículos E_7 y E_6 , construiremos retículos donde “eliminamos” vértices del diagrama de tipo E_8 . Si consideramos el vector:

$$v = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4 + 6\mathbf{e}_5 + 4\mathbf{e}_6 + 2\mathbf{e}_7 + 3\mathbf{e}_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2),$$

v es una raíz de E_8 . Definamos $\Gamma = \{x \in E_8 \mid x \cdot v = 0\}$. Este es un retículo en el complemento ortogonal del vector v en \mathbb{R}^8 . Como $\mathbf{e}_i \cdot v = 0$ para $i = 2, \dots, 8$, las raíces fundamentales $\mathbf{e}_i, i = 2, \dots, 8$ son elementos de Γ , y el diagrama de Coxeter-Dynkin para

éstas raíces es del tipo E_7 . Basta notar que el conjunto $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, v\}$ es una base de \mathbb{R}^8 , para ver que las raíces $\mathbf{e}_i, i = 2, \dots, 8$, son una base del complemento ortogonal de v y por lo tanto generan a Γ que por consistencia de nuestra notación llamaremos E_7 . De ésta forma “eliminamos” un vértice del diagrama E_8 .

Para “eliminar” dos vértices y obtener uno de tipo E_6 , hacemos Γ el complemento ortogonal de v y $-\mathbf{e}_1$ en \mathbb{R}^8 . Por la relación anterior entre v y los \mathbf{e}_i y que $-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i = 0$ para $i = 3, \dots, 8$, las raíces $\mathbf{e}_i, i = 3, \dots, 8$, están contenidas en Γ ; además lo generan y tienen diagrama de Coxeter-Dynkin asociado de tipo E_6 , denotamos $\Gamma = E_6$.

Así concluimos con la clasificación de los diagramas de Coxeter-Dynkin conexos. Motivaremos a partir de esto la noción de *retículo reducible*, notando que si un retículo de raíz tiene como diagrama de Coxeter-Dynkin un grafo conexo, el no podrá ser visto como suma directa de dos subespacios ortogonales entre sí, pues la regla para el producto interno marcada por el diagrama no lo permite. Así, un retículo Γ se dice *reducible* si es suma directa ortogonal de otros retículos, $\Gamma = \Gamma_1 \perp \Gamma_2$; en caso contrario se dice que Γ es *irreducible*.

De la definición anterior, un diagrama de Coxeter-Dynkin asociado a un retículo de raíz Γ desconexo tiene como componentes conexas diagramas de tipo A_n, D_n, E_8, E_7 o E_6 . Además los retículos generados por cada componente son ortogonales dos a dos, y por tanto son linealmente independientes; luego Γ es suma directa ortogonal de los retículos generados por cada una de sus componentes conexas. Concluimos así la clasificación de los retículos de raíz:

Teorema 1.2.10. *Todo retículo de raíz es la suma directa ortogonal de los retículos de raíz irreducibles con los diagramas de Coxeter-Dynkin expuestos en la Figura 1.6.*

Capítulo 2

Clasificación de las Álgebras de Lie semisimples complejas

2.1. Definiciones y ejemplos

Un álgebra A sobre un cuerpo k es un espacio vectorial A munido con un producto $A \times A \rightarrow A$ dado por $(a, b) \mapsto ab$, que cumple, para todos $a, b, c \in A$ y $\alpha \in k$, los siguientes axiomas:

$$\text{A1) } (a + b)c = ac + bc.$$

$$\text{A2) } a(b + c) = ab + ac.$$

$$\text{A3) } \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

Estas condiciones nos dicen que el producto es una aplicación bilineal; además A1) y A2) implican que A es un anillo, y por A3), el producto en A es compatible con el producto por escalar de A como espacio vectorial. La dimensión del álgebra A es la dimensión de A como espacio vectorial sobre k .

Ejemplo 2.1.1. *Las siguientes son álgebras sobre un cuerpo k :*

1. *El espacio vectorial de las matrices $M_{n \times n}(k)$ con la multiplicación usual de matrices.*

2. El conjunto de los polinomios $k[x]$ con la multiplicación usual de polinomios.
3. Cualquier espacio vectorial V sobre k con el producto definido por $uv = 0$ para todos $u, v \in V$.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un álgebra \mathfrak{g} cuyo producto denotamos por $[\cdot, \cdot]$, y llamamos corchete, tal que para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ satisface:

$$\text{L1)} \quad [X, X] = 0.$$

$$\text{L2)} \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

La Propiedad L1) se conoce como la condición de antisimetría, pues esta implica L1') $[X, Y] = -[Y, X]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. En efecto

$$[X + Y, X + Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = [X, Y] + [Y, X] = 0;$$

L1) y L1') son equivalentes si el cuerpo k tiene característica distinta de 2. En consecuencia, las álgebras de Lie, en general, no son abelianas, lo son si y sólo si $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Adicionalmente, un álgebra de Lie es un anillo sin elemento identidad, pues $[X, X] = 0$ para todo X .

La Propiedad L2) se llama la identidad de Jacobi. Una consecuencia de esta identidad es que las álgebras de Lie, en general, no son asociativas, pues $[[Z, X], Y]$ es la diferencia entre $[X, [Y, Z]]$ y $[[X, Y], Z]$.

Ejemplo 2.1.2. Las siguientes son álgebras de Lie sobre un cuerpo k .

1. Cualquier espacio vectorial sobre k con el corchete dado por $[x, y] = 0$ para todo x, y . Este ejemplo nos dice que todo espacio vectorial admite una estructura de álgebra de Lie.
2. Sea A un álgebra asociativa sobre k . Si dotamos a A con el corchete dado por el conmutador, es decir, $[x, y] = xy - yx$, obtenemos un álgebra de Lie \mathfrak{a}_L . Note que el corchete es bilineal, además

$$L1) [x, x] = x^2 - x^2 = 0, \text{ para todo } x \in A_L.$$

$$L2) [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0.$$

Del ejemplo anterior se deduce que toda álgebra asociativa admite una estructura de álgebra de Lie.

Observación 2.1.3. El corchete para dos elementos de un álgebra de Lie \mathfrak{g} está completamente determinado por el corchete en los elementos de una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ del espacio vectorial \mathfrak{g} . En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{e}_j$, luego $[X, Y] = \sum_{i < j} \gamma_i [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$, donde $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \mathbf{e}_k$. Las constantes c_{ij}^k se llaman constantes de estructura. Note que las constantes para $i \geq j$ se pueden deducir de las constantes c_{ij}^k con $i < j$, pues de L1) y L1') se concluye que $c_{ii}^k = 0 = c_{ij}^k + c_{ji}^k$. Además, por la identidad de Jacobi las constantes de estructura cumplen $c_{ij}^m c_{jk}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l = 0$. En general, las álgebras de Lie no se presentan por sus constantes de estructura. Sin embargo estas tienen aplicaciones interesantes, como la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión 1, entonces el espacio vectorial \mathfrak{g} tiene un solo elemento en la base, digamos \mathbf{e} , luego, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $X = \alpha \mathbf{e}$ e $Y = \beta \mathbf{e}$ y $[X, Y] = [\alpha \mathbf{e}, \beta \mathbf{e}] = \alpha \beta [\mathbf{e}, \mathbf{e}] = 0$. En consecuencia todas las álgebras de Lie de dimensión 1 son abelianas.

Ahora, si consideramos \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión 2, y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una de sus bases. Sean $X = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$ e $Y = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$ elementos en \mathfrak{g} . Así:

$$[X, Y] = [\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2] = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Luego, el corchete es el subespacio generado por el vector $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Si este vector es no nulo, entonces hagamos un cambio de base tomando a $\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ como el primer vector de la nueva base, e \mathbf{y}_1 un vector linealmente independiente con \mathbf{x} ; así $[\mathbf{x}, \mathbf{y}_1] = \alpha \mathbf{x}$. Si tomamos $\mathbf{y} = \alpha^{-1} \mathbf{y}_1$ como el segundo vector de la nueva base, se obtiene una base $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$

tal que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}$. De otro lado, si \mathfrak{g} es un espacio vectorial con base $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ y definimos el corchete $[\cdot, \cdot]$ en \mathfrak{g} por extensión bilineal de $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = [\mathbf{y}, \mathbf{y}] = 0$, entonces \mathfrak{g} munida con este corchete es un álgebra de Lie, pues si $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ y los α 's, β 's y γ 's son sus respectivos escalares en esta base, entonces:

$$\text{L1)} \quad [X, X] = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)\mathbf{x} = 0.$$

$$\text{L2)} \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = \alpha_2(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\mathbf{x} + \beta_2(\alpha_2\gamma_1 - \gamma_2\alpha_1)\mathbf{x} + \gamma_2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\mathbf{x} = 0.$$

En conclusión, en dimensión 2 las álgebras de Lie que no son abelianas, son isomorfas a una con la base recién expuesta.

2.2. Álgebras de Lie especiales, generación y los teoremas de isomorfismos

Un caso especial del Item 2 del Ejemplo 2.1.2 es el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$, consideremos A el álgebra de todos los endomorfismos de un espacio vectorial V (operadores de V), el álgebra de Lie \mathfrak{a}_L se llama *el álgebra de Lie general lineal de V* y se denota por $\mathfrak{gl}(V)$. Tenemos $\mathfrak{sl}(V)$, *el álgebra de Lie especial lineal de V* , que consiste de todos los endomorfismos de V con traza cero.

En concreto, si $V = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{gl}(V)$ se denota por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y consiste de todas las matrices $n \times n$ reales y $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie especial lineal de V conformada por el conjunto de matrices de traza cero (del mismo modo para \mathbb{C}^n).

Sean \mathfrak{h} y \mathfrak{g} álgebras de Lie sobre un cuerpo k . Un *homomorfismo de álgebras de Lie* o un *morfismo de Lie de \mathfrak{h} en \mathfrak{g}* es una transformación lineal $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ que es un homomorfismo de anillos, es decir $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$. Un *isomorfismo de álgebras de Lie* es un morfismo de Lie que es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Un subespacio \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , se dice una *subálgebra de Lie de \mathfrak{g}* , si \mathfrak{h} es cerrado para el corchete, es decir $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ para todos $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Luego \mathfrak{h} es un álgebra de Lie por sí misma. Una subálgebra de Lie \mathfrak{h} se dice un *ideal de \mathfrak{g}* , si $[H, G] \in \mathfrak{h}$ para todos $H \in \mathfrak{h}, G \in \mathfrak{g}$. Note que la antisimetría del corchete nos dice que todos los ideales de \mathfrak{g} son bilaterales.

Dados dos subconjuntos no vacíos \mathfrak{a} y \mathfrak{b} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , denotamos por $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ al subespacio generado por los corchetes de Lie $[A, B]$ con $A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}$. Es inmediato de esta definición que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Bajo esta óptica, \mathfrak{h} es una *subálgebra de \mathfrak{g}* si y sólo si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Y es un *ideal de \mathfrak{g}* si y sólo si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

A la subálgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se le llama *el álgebra derivada de \mathfrak{g}* o *el conmutador de \mathfrak{g}* debido a que da cuenta de cuáles elementos conmutan en \mathfrak{g} .

Si \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ y $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ son ideales de \mathfrak{g} . Entendemos por $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ la subálgebra

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{V = A + B | A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}\}.$$

En efecto, es claro que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ es un ideal pues posee las propiedades de \mathfrak{a} y \mathfrak{b} ; además, en virtud de la identidad de Jacobi $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] \subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, finalmente, la bilinealidad del corchete implica $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Si \mathfrak{j} es un ideal de \mathfrak{g} , el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ con el corchete dado por la regla $[X + \mathfrak{j}, Y + \mathfrak{j}] = [X, Y] + \mathfrak{j}$ es un álgebra de Lie. Esto es inmediato, pues al ser \mathfrak{j} un ideal del anillo \mathfrak{g} , el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ es un anillo para la regla descrita por el corchete, L1) y L2) se obtienen directo de la definición del corchete. Esto nos dice que \mathfrak{j} define una relación de congruencia y para un morfismo de Lie $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$, $\ker \phi$ es un ideal de \mathfrak{h} . Luego todos los teoremas de isomorfismos valen para álgebras de Lie.

Primer Teorema de Isomorfismos.

Sea $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Si \mathfrak{i} es un ideal de \mathfrak{h} contenido en $\ker \phi$, entonces existe un único morfismo de Lie

$$\varphi : \mathfrak{h}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{g}$$

con $\varphi(\mathfrak{h}) = \phi(\mathfrak{h})$ y $\ker(\varphi) = \ker \phi/\mathfrak{i}$, que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ & \searrow \pi & \uparrow \varphi \\ & & \mathfrak{h}/\mathfrak{i} \end{array}$$

donde $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ es la proyección natural al cociente, además se tiene que:

$$\mathfrak{h}/\ker \phi \cong \phi(\mathfrak{h}).$$

Segundo Teorema de Isomorfismos.

Si $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ son ideales de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}).$$

Tercer Teorema de Isomorfismos.

Los ideales de \mathfrak{g} que contienen al ideal \mathfrak{i} se corresponden de manera biunívoca con los ideales de $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, tomemos \mathfrak{s} un subconjunto arbitrario de \mathfrak{g} . Definimos el *centralizador de \mathfrak{s} en \mathfrak{g}* por $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{s}\}$ y el *centro de \mathfrak{g}* es $Z(\mathfrak{g}) := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Si \mathfrak{s} es una subálgebra de Lie, llamamos el *normalizador de \mathfrak{s} en \mathfrak{g}* a $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{s} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{s}\}$.

El centro de \mathfrak{g} , el centralizador y el normalizador de \mathfrak{s} en \mathfrak{g} son subálgebras de \mathfrak{g} . Además el centro es un ideal de \mathfrak{g} y siempre se cumple que $\mathfrak{s} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. De hecho, el normalizador puede describirse en palabras como la subálgebra de \mathfrak{g} más grande que contiene a \mathfrak{s} como ideal.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice simple si no es abeliana y no tiene ideales propios no triviales, es decir sus únicos ideales son \mathfrak{g} y 0 .

Observación 2.2.1. En un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} se cumple que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ y $Z(\mathfrak{g}) = 0$. En efecto, como \mathfrak{g} no es abeliana y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ es un ideal de \mathfrak{g} , entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, como también $Z(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$ es un ideal de \mathfrak{g} , luego $Z(\mathfrak{g}) = 0$.

2.3. La representación adjunta y la forma de Killing

Dada un álgebra A sobre un cuerpo k , una *derivación de A* es un endomorfismo D que cumple la regla de Leibniz para el producto, es decir

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

La composición de derivaciones, no necesariamente es una derivación, pero el corchete de dos derivaciones siempre lo es. En efecto, dadas dos derivaciones D y D' de A , se tiene:

$$\begin{aligned} [D, D'](xy) &= DD'(xy) - D'D(xy) \\ &= D(D'(x)y + xD'(y)) - D'(D(x)y + xD(y)) \\ &= DD'(x)y + D'(x)D(y) + D(x)D'(y) + xDD'(y) - \\ &\quad D'D(x)y - D(x)D'(y) - D'(x)D(y) - xD'D(y) \\ &= DD'(x)y - DD'(x)y + xDD'(y) - xD'D(y) \\ &= [D, D'](x)y + x[D, D'](y). \end{aligned}$$

Luego, si consideramos $\text{Der}(A)$ como el conjunto de todas las derivaciones de A , éste no es una subálgebra de $\text{End}(A)$ pero si es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Cada $X \in \mathfrak{g}$ define una aplicación $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ por $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$. Esta aplicación es una derivación pues la identidad de Jacobi puede escribirse como

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]], \text{ esto es, } \text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)].$$

Una derivación de este tipo se conoce como una *derivación interna*. Además la aplicación $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ dada por $\text{ad}(X) = \text{ad}_X$ es un morfismo de Lie. En efecto, de la identidad

de Jacobi: $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$, lo que significa

$$\text{ad}([X, Y])(Z) = \text{ad}(X)(\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y)(\text{ad}(X)(Z)) = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z).$$

Una representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} en un espacio vectorial V es un morfismo de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Es decir, φ le asigna a cada $X \in \mathfrak{g}$ un operador $\varphi(X) : V \rightarrow V$ que es lineal para X y respeta el corchete, es decir

$$\varphi(\alpha X + \beta Y)v = \alpha \varphi(X)v + \beta \varphi(Y)v \text{ y}$$

$$\varphi([X, Y])v = [\varphi(X), \varphi(Y)]v = (\varphi(X)\varphi(Y))v - (\varphi(Y)\varphi(X))v.$$

Usualmente se escribe Xv en lugar de $\varphi(X)v$; así, la aplicación $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ dada por $(X, v) \mapsto Xv$ es una aplicación k -bilineal que satisface

$$[X, Y]v = XYv - YXv$$

y decimos que V es un \mathfrak{g} -espacio o un \mathfrak{g} -módulo por su similitud a los módulos.

Ejemplo 2.3.1. *El morfismo adjunto $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una representación así su imagen esté contenida en $\text{Der}(\mathfrak{g})$ y se llama la representación adjunta de \mathfrak{g} en \mathfrak{g} .*

Observación 2.3.2. $\ker(\text{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$ es el centro de \mathfrak{g} . En consecuencia toda álgebra de Lie con centro trivial es isomorfa a un álgebra de Lie lineal por medio de la representación adjunta. Este resultado es válido en general para cualquier álgebra de Lie de dimensión finita, este resultado es el *Teorema de Ado e Iwasawa* que dice que toda álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de Lie lineal; notamos que éste teorema es análogo al *Teorema de Cayley* que establece que todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.

El morfismo de Lie adjunto para cada elemento de un álgebra de Lie y la representación adjunta de ésta misma son bastante importantes, pues nos permiten definir una aplicación bilineal llamada *la forma de Killing* que viene dada por:

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k,$$

$$K(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$$

la cuál es fundamental en el estudio de las álgebras de Lie Semisimples, pues permite dar una caracterización para este tipo de álgebras. A continuación veamos unas de las propiedades importantes que cumple la forma de Killing.

Proposición 2.3.3.

1. La forma de Killing es simétrica, es decir $K(X, Y) = K(Y, X)$.
2. La forma de Killing es invariante por la representación adjunta, lo que significa

$$K([X, Y], Z) = K(X, [Y, Z]).$$

3. Si notamos por $K_{\mathfrak{g}}$ a la forma de Killing de \mathfrak{g} y por $K_{\mathfrak{j}}$ a la forma de Killing de \mathfrak{j} un ideal de \mathfrak{g} , entonces $K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{j}} \equiv K_{\mathfrak{j}}$.

En efecto, 1. es inmediata del hecho que $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ para todos $X, Y \in \text{End}(\mathfrak{g})$, en particular para ad_X y ad_Y . Para probar 2. debemos tener en cuenta la propiedad cíclica de la traza, es decir $\text{Tr}(XYZ) = \text{Tr}(ZXY) = \text{Tr}(YZX)$, para todos $X, Y, Z \in \text{End}(\mathfrak{g})$. Así,

$$\begin{aligned} K([X, Y], Z) &= \text{Tr}(\text{ad}_{[X, Y]} \text{ad}_Z) \\ &= \text{Tr}((\text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \text{ad}_X) \text{ad}_Z) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y \text{ad}_Z) - \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_X \text{ad}_Z). \end{aligned}$$

Por otro lado, si analizamos la segunda expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} K(X, [Y, Z]) &= \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_{[Y, Z]}) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}_X (\text{ad}_Y \text{ad}_Z - \text{ad}_Z \text{ad}_Y)) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y \text{ad}_Z) - \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Z \text{ad}_Y). \end{aligned}$$

Comparando ambas expresiones y teniendo en cuenta la propiedad mencionada, concluimos la igualdad que afirmamos.

Finalmente, sea $\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}} = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base de \mathfrak{j} que se extiende a $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base de \mathfrak{g} . Dado que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j}$, para cada $X \in \mathfrak{j}$, la matriz de ad_X en la base \mathfrak{B} es de la forma

$$\text{ad}_X : \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \text{ad}_X|_{\mathfrak{j}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es decir una matriz de bloques. Si Y es otro elemento de \mathfrak{j} , su matriz es de la misma forma y el producto se realiza en bloques y resulta ser:

$$\text{ad}_X \text{ad}_Y = \left(\begin{array}{c|c} \text{ad}_X|_{\mathfrak{j}} \text{ad}_Y|_{\mathfrak{j}} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

En consecuencia la traza de $\text{ad}_X \text{ad}_Y$ para $X, Y \in \mathfrak{j}$, que por definición es $K_{\mathfrak{j}}(X, Y)$, coincide con la traza de $\text{ad}_X|_{\mathfrak{j}} \text{ad}_Y|_{\mathfrak{j}}$, es decir, coincide con $K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{j}}$.

Una forma bilineal simétrica $B : V \times V \rightarrow k$ se dice *no degenerada* si su radical o núcleo definido por

$$\text{rad}(B) := \{x \in V \mid B(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in V\},$$

es igual a 0. En otro caso se dice que B es *degenerada*.

2.4. Álgebras de Lie nilpotentes, solubles y semisimples

Ahora abordaremos los conceptos sobre álgebras solubles y nilpotentes, presentando resultados importantes para cada clase, mas no necesariamente presentaremos la prueba de dichos resultados pues el trabajo busca abordar otro aspecto de las álgebras de Lie.

Debemos tener en cuenta que en adelante asumiremos que las álgebras de Lie sobre las que versamos son de dimensión finita.

Resulta que, dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , podemos definir de manera inductiva dos cadenas descendentes de ideales de \mathfrak{g} por medio de su conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, la primera llamada serie central y la segunda serie derivada o serie de conmutación. Estos nombres tienen sentido pues en el primer caso, la serie proporciona información sobre el centro del álgebra y la segunda brinda información sobre la existencia de ideales abelianos en \mathfrak{g} . Las definimos como sigue, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_{j+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j]$ donde $j = 0, 1, \dots$, así obtenemos la serie central

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_j \supset \dots$$

De manera similar, $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^{j+1} := [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j]$, $j = 0, 1, \dots$, obteniendo la cadena de conmutadores

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^j \supset \dots$$

Ahora bien, decimos que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie *nilpotente* si existe j tal que $\mathfrak{g}_j = 0$ y que es *soluble* si existe j para el cual $\mathfrak{g}^j = 0$.

Si $0 \neq \mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces el centro de \mathfrak{g} es no trivial pues el último eslabón no nulo de la serie central está contenido en él. Si es soluble, entonces \mathfrak{g} admite un ideal abeliano no nulo ya que el último eslabón no nulo de la serie de conmutación es dicho ideal.

Observación 2.4.1. Veamos que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. Si suponemos que $\mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{g}_j$ para un j y notemos que $\mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j] \subset [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}_j] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{j+1}$, entonces concluimos que $\mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{g}_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que toda álgebra de Lie nilpotente es soluble mas no toda álgebra de Lie soluble es nilpotente.

Consideremos un álgebra de Lie no abeliana \mathfrak{g} de dimensión 2 sobre un cuerpo k , es decir admite una base $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ que satiface $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}$. Entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle \mathbf{x} \rangle_k$ y $[\langle \mathbf{x} \rangle_k, \langle \mathbf{x} \rangle_k] = 0$, y por tanto \mathfrak{g} es soluble; pero $[\mathfrak{g}, \langle \mathbf{x} \rangle_k] = \langle \mathbf{x} \rangle_k$ de donde se tiene que \mathfrak{g} no es nilpotente.

Ahora, exploremos algunos resultado sobre álgebras solubles y nilpotentes que nos permitirán definir conceptos importantes en lo que sigue.

Proposición 2.4.2. *Toda subálgebra y todo cociente de un álgebra de Lie soluble (resp. nilpotente) es soluble (resp. nilpotente).*

En efecto, si \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie soluble \mathfrak{g} , como $\mathfrak{h}^j \subset \mathfrak{g}^j$ para todo j , entonces \mathfrak{h} es soluble, pues existe j tal que $\mathfrak{h}^j \subset \mathfrak{g}^j = 0$.

Sea $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un epimorfismo de Lie. Entonces $\phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ y $\phi(\mathfrak{g}^j) = \mathfrak{h}^j$ para todo j . Por lo tanto si \mathfrak{g} es soluble entonces \mathfrak{h} es soluble. En particular, si consideramos $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ la proyección al cociente de \mathfrak{g} a un ideal \mathfrak{i} es un epimorfismo de Lie, tenemos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ es soluble si \mathfrak{g} es soluble. En el caso nilpotente la prueba es idéntica. Aquí vimos que imágenes homomórficas de álgebras de Lie solubles (resp. nilpotentes) son solubles (resp. nilpotentes).

Proposición 2.4.3. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre un cuerpo k y \mathfrak{h} un ideal tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ y \mathfrak{h} son solubles, entonces \mathfrak{g} es soluble.*

Veamos que esta afirmación es válida. Dado que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es soluble, existe un j tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^j = 0$. Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ la proyección al cociente y además

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^j = \pi(\mathfrak{g})^j = \pi(\mathfrak{g}^j),$$

luego $\mathfrak{g}^j \subset \ker(\pi) = \mathfrak{h}$. Del hecho que \mathfrak{h} es soluble sabemos que existe i tal que $\mathfrak{h}^i = 0$, luego $\mathfrak{g}^{i+j} = (\mathfrak{g}^j)^i \subset \mathfrak{h}^i = 0$. Por lo tanto \mathfrak{g} es soluble.

En consecuencia, toda álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre un cuerpo k admite un único ideal soluble maximal. Este ideal se llama el *radical de \mathfrak{g}* y se denota por $\text{rad}(\mathfrak{g})$. Para ver que en efecto existe $\text{rad}(\mathfrak{g})$, nos basta probar que si \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales solubles de \mathfrak{g} entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ también lo es, pues definimos el radical de \mathfrak{g} por

$$\text{rad}(\mathfrak{g}) := \sum_{\mathfrak{h} \text{ soluble}} \mathfrak{h}.$$

Esta suma tiene un número finitos términos, pues al ser \mathfrak{g} de dimensión finita, tiene finitos ideales solubles. Sean \mathfrak{a} y \mathfrak{b} ideales solubles de \mathfrak{g} y sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Sabemos que \mathfrak{h} es un

ideal de \mathfrak{g} y en virtud del Segundo Teorema de Isomorfismos junto con la Proposición 2.4.3 \mathfrak{h} es soluble, pues

$$\mathfrak{h}/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

donde \mathfrak{a} y $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ son solubles.

Si un álgebra de Lie $\mathfrak{g} \neq 0$ sobre un cuerpo k no admite ideales solubles no nulos, i.e. $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, diremos que \mathfrak{g} es semisimple.

Observación 2.4.4. Toda álgebra de Lie simple es semisimple y toda álgebra de Lie semisimple tiene centro trivial.

En efecto, si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie simple, entonces sus únicos ideales son \mathfrak{g} y 0 . Además $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, luego \mathfrak{g} no es soluble. Por lo tanto $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ y \mathfrak{g} es semisimple. Nótese también que $Z(\mathfrak{g})$ es un ideal soluble de \mathfrak{g} pues es abeliano, luego $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$ entonces si \mathfrak{g} es semisimple su centro es trivial.

Proposición 2.4.5. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo k , entonces $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ es semisimple.

Si consideramos $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ la proyección al cociente y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ un ideal soluble, entonces $\mathfrak{a} = \pi^{-1}(\mathfrak{h})$ es un ideal soluble de \mathfrak{g} , pues $\mathfrak{a}/\text{rad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}$. En consecuencia $\mathfrak{a} \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$ y por lo tanto $\mathfrak{h} = \pi(\mathfrak{a}) = 0$.

Los Teoremas de Lie y de Engel son bastante importantes en el estudio de las álgebras de Lie solubles y nilpotentes, además de darle soporte y sentido teórico a algunas definiciones que daremos más adelante. Enunciamos éstos resultados junto con el criterio de simplicidad de Cartan que es indispensable en el estudio de álgebras de Lie simples y se requiere para presentar la prueba del criterio de semisimplicidad de Cartan.

Teorema 2.4.6 (Lie). Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie soluble, $0 \neq V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de \mathfrak{g} . Entonces:

1. Existe un autovector no nulo simultáneo $v \in V$ para todo $\pi(X)$ con $X \in \mathfrak{g}$. Más general, si k no es algebraicamente cerrado, pero todos los $\pi(X)$ tienen sus autovalores en k , la conclusión no cambia.
2. Existe una base de V tal que todas las matrices de $\pi(X)$ con $X \in \mathfrak{g}$ son triangulares superiores.

Teorema 2.4.7 (Engel). Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $0 \neq V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo k .

1. \mathfrak{g} es nilpotente si, y sólo si, ad_X es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$.
2. Si \mathfrak{g} es un álgebra de endomorfismos nilpotentes de V , entonces:
 - a. \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente.
 - b. Existe un autovector no nulo $v \in V$ simultáneo para todo $X \in \mathfrak{g}$.
 - c. Existe una base de V tal que la matriz de X es triangular superior estricta para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.4.8 (Criterio de solubilidad de Cartan). \mathfrak{g} es un álgebra de Lie soluble si y sólo si $K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$.

El criterio de solubilidad de Cartan junto con la forma de Killing nos proporcionan un poderoso criterio para caracterizar las álgebras de Lie semisimples.

Teorema 2.4.9 (Criterio de semisimplicidad de Cartan). \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple si y sólo si K es no degenerada.

Para esto veamos que si K es la forma de Killing de \mathfrak{g} , entonces el radical de K es un ideal de \mathfrak{g} contenido en el radical de \mathfrak{g} . En efecto, la forma de Killing es invariante por la representación adjunta, luego para $X \in \text{rad}(K)$ y para todo $Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple

$$K([X, Y], Z) = K(X, [Y, Z]) = 0,$$

entonces $[X, Y] \in \text{rad}(K)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ y además la misma cuenta vale para X, Y, Z en $\text{rad}(K)$, luego es un ideal soluble por el criterio de solubilidad de Cartan y por lo tanto

$\text{rad}(K) \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$.

Adicionalmente veamos que todo ideal abeliano de \mathfrak{g} está contenido en el radical de K , puesto que si \mathfrak{a} es un ideal abeliano de \mathfrak{g} y tomamos $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}$ junto con el endomorfismo $T := \text{ad}_X \text{ad}_Y$, tenemos que $T(Z) = \text{ad}_X \text{ad}_Y(Z) = [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{a}$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Además $T^2(Z) = [X, [Y, T(Z)]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, pues \mathfrak{a} es abeliano y vale para todo $Z \in \mathfrak{g}$, entonces $T^2 \equiv 0$, es decir $(\text{ad}_X \text{ad}_Y)^2 = 0$ y así $\text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$, es decir $K(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto $\mathfrak{a} \subset \text{rad}(K)$.

De esta forma, si \mathfrak{g} es semisimple, entonces $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ y K es no degenerada. Recíprocamente si K es no degenerada, entonces $\text{rad}(K) = 0$, luego \mathfrak{g} no contiene ideales abelianos no nulos y \mathfrak{g} es semisimple.

En la Observación 2.4.4 vimos que toda álgebra de Lie simple es semisimple, mas no toda semisimple es simple, el resultado siguiente nos ilustrará esta afirmación y nos mostrará la importancia de estudiar las álgebras de Lie simples para clasificar las semisimples.

Teorema 2.4.10. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , entonces \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$$

donde cada componente es una subálgebra de Lie simple y un ideal en \mathfrak{g} . En este caso la descomposición es única, salvo isomorfismo y el orden de las componentes simples, y los únicos ideales de \mathfrak{g} son suma de algunos de los \mathfrak{g}_j .

Primero supongamos que \mathfrak{g} puede descomponerse como en el enunciado y sea \mathfrak{j} un ideal de \mathfrak{g} , consideremos $p_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$ la proyección de \mathfrak{g} en \mathfrak{g}_i . Si consideramos $\mathfrak{j}_i := p_i(\mathfrak{j})$, éste es un ideal de \mathfrak{g}_i , pues para todo $X \in \mathfrak{g}, X_i \in \mathfrak{g}_i$ se tiene

$$[p_i(X), X_i] = p_i[X, X_i] \in p_i(\mathfrak{j}) = \mathfrak{j}_i,$$

Por la simplicidad de \mathfrak{g}_i , \mathfrak{j}_i es o bien el ideal nulo o bien $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{j}_i$. En el segundo caso se

tiene que $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{j}$ puesto que $\mathfrak{j}_i \subset \mathfrak{j}$. Por lo tanto, dado que $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i$

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{j} \cap \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i = \bigoplus_{i=1}^m (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{g}_i) = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{j}} \mathfrak{g}_i.$$

Esto prueba la unicidad en la escritura y la estructura de los ideales. Además,

$$[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] = \left[\bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{j}} \mathfrak{g}_i, \bigoplus_{\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{j}} \mathfrak{g}_k \right] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{j}} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{j}} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{j}.$$

Luego \mathfrak{j} no es soluble a menos que sea el ideal nulo y por tanto \mathfrak{g} es semisimple.

Recíprocamente, si \mathfrak{g} es semisimple y no es simple, admite un ideal minimal $\mathfrak{j} \neq 0$. Este ideal no es abeliano pues \mathfrak{g} no contiene ideales solubles. Sea $\mathfrak{j}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} | K(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{j}\}$ el complemento ortogonal de \mathfrak{j} respecto a la forma de Killing, \mathfrak{j}^\perp es un ideal de \mathfrak{g} pues K es invariante por la representación adjunta y como es no degenerada $\dim(\mathfrak{j}) + \dim(\mathfrak{j}^\perp) = \dim(\mathfrak{g})$. Por la definición de \mathfrak{j}^\perp , $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp$ verifica $K(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp, \mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp) \equiv 0$, por lo tanto $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp$ es un ideal soluble y al ser \mathfrak{g} semisimple $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp = 0$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^\perp$.

Como podemos ver, la prueba procede por inducción global sobre la dimensión de \mathfrak{g} y para concluirla debemos probar que \mathfrak{j} es simple y \mathfrak{j}^\perp es semisimple. Si \mathfrak{a} es un ideal de \mathfrak{j} , también es un ideal de \mathfrak{g} y por la minimalidad de \mathfrak{j} , \mathfrak{a} debe ser el ideal nulo, luego \mathfrak{j} es simple. Por el mismo argumento, los ideales de \mathfrak{j}^\perp son ideales de \mathfrak{g} , luego los ideales solubles de \mathfrak{j}^\perp son ideales solubles de \mathfrak{g} y por lo tanto \mathfrak{j}^\perp no tiene ideales solubles no nulos, lo cual implica que es semisimple.

Finalmente si \mathfrak{h} es un ideal simple de \mathfrak{g} , entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ es un ideal contenido en \mathfrak{h} , y así el es 0 o \mathfrak{h} . Pero el centro de \mathfrak{g} es trivial, en consecuencia $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}$. De la descomposición en suma directa se tiene

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}, \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_m] = \mathfrak{h}.$$

Luego existe i tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{h}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_j] = 0$ si $j \neq i$, esto en consecuencia a que los \mathfrak{g}_j son linealmente independientes. De $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{h}$ se concluye que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_i$ y por la simplicidad

de \mathfrak{g}_i se tiene que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_i$. Luego todo ideal simple es uno en la lista de la descomposición.

De esta prueba aprendimos que toda álgebra de Lie semisimple se descompone como suma directa de *todos* sus ideales simples y que si conocemos las álgebras de Lie simples, conoceremos las semisimples, además, si \mathfrak{j} es un ideal en \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{j}^\perp también lo es, y $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^\perp$. A este tipo de álgebras se les llama *reductivas*; es decir que para cualquier ideal del álgebra existe un ideal complemento directo. Otra consecuencia de este resultado es que si \mathfrak{g} es semisimple entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

2.5. Álgebra lineal y su relación con las álgebras de Lie nilpotentes

Para finalizar con el marco teórico que requerimos para la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas recordemos unos conceptos y unos resultados del álgebra lineal sobre descomposición de endomorfismos y de espacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Se dice que un endomorfismo de V es *semisimple* si las raíces de su polinomio minimal son distintas, lo que equivale a decir que es diagonalizable.

Teorema 2.5.1 (Descomposición de Jordan). *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y X es un endomorfismo de V , entonces existen dos únicos endomorfismos que conmutan X_{sim} , X_{nil} tales que*

$$X = X_{\text{sim}} + X_{\text{nil}}$$

con X_{sim} semisimple y X_{nil} nilpotente.

Este resultado es valioso para la demostración del criterio de solubilidad de Cartan, ver [Hu].

Proposición 2.5.2 (Descomposición de Fitting). *Dado un endomorfismo X se puede descomponer el espacio vectorial en suma directa de dos espacios invariantes bajo X*

$$V = V_X^1 \oplus V_X^0$$

y se tiene que $X|_{V_X^0}$ es nilpotente y $X|_{V_X^1}$ es un isomorfismo.

Si tenemos \mathfrak{g} un álgebra de Lie de endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, una forma lineal $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ es un *peso* de V para \mathfrak{g} si existe $v \in V$ no nulo tal que $(X - \alpha(X)id_V)^n v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y algún $n \in \mathbb{N}$ (que depende de X y α). Al conjunto de estos vectores se le llama espacio de peso α , incluyendo el vector 0. Más adelante trasladaremos este concepto a un álgebra de Lie cualquiera y a una representación de dimensión finita para definir las raíces del álgebra de Lie.

Teorema 2.5.3. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente de endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, \mathfrak{g} tiene un número de pesos finito, los espacios peso son invariantes bajo \mathfrak{g} y V es la suma directa de estos subespacios. Solo existe una descomposición de V con las propiedades que tienen los espacios peso.*

Este resultado es consecuencia de los teoremas de descomposición que expusimos del álgebra lineal junto con los presentados sobre álgebras nilpotentes.

2.6. Subálgebras de Cartan y sistemas de raíces

Ahora estamos listos para clasificar las álgebras de Lie semisimples complejas. El siguiente ejemplo ilustra de manera detallada y completa la dinámica del trabajo, veamos:

Ejemplo 2.6.1 ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$). *Consideremos el álgebra de Lie sobre \mathbb{C} , $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ para $n \geq 2$ conformada por las matrices $n \times n$ con entradas complejas de traza cero. Consideremos también la subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ conformada por las matrices diagonales. Esta subálgebra es nilpotente por ser abeliana y coincide con su normalizador ya que si la matriz A tiene como entrada $a_{ij} \neq 0$ y $D \in \mathfrak{h}$ con $d_{ii} \neq 0$ entonces la entrada ij de $[A, D]$,*

$([A, D])_{ij} = -d_{ii}a_{ij} \neq 0$, luego $[A, D]$ no es una matriz diagonal. Una forma real de \mathfrak{h} es \mathfrak{h}_0 conformada por matrices diagonales con entradas reales de traza cero, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0$. Denotemos por E_{ij} a la matriz cuya entrada ij es 1 y todas las demás son 0, y sea H un elemento arbitrario de \mathfrak{h} . Definamos las aplicaciones lineales e_i que toman la i -ésima componente de la diagonal de H , es claro que e_i es un elemento del dual de \mathfrak{h} .

Calculemos $\text{ad}_H(E_{ij})$ para cada $H \in \mathfrak{h}$. Dada $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$.

$$\text{ad}_H(E_{ij}) = HE_{ij} - E_{ij}H = h_i E_{ij} - h_j E_{ij} = (h_i - h_j)E_{ij} = ((e_i - e_j)(H))E_{ij}.$$

Se sigue que E_{ij} es un autovector simultáneo de ad_H para todo $H \in \mathfrak{h}$, con autovalor $(e_i - e_j)(H)$. Los funcionales $e_i - e_j$ son lineales y si $i \neq j$ es una aplicación no nula; además $e_i - e_j \in \mathfrak{h}^*$, para $i \neq j$. Estas aplicaciones serán las raíces, es decir, el conjunto de raíces es

$$\Phi := \{\alpha = e_i - e_j | i \neq j\}.$$

Hay $n(n-1)$ raíces, Φ genera a \mathfrak{h}^* , pero no es una base pues dado $\alpha \in \Phi$, $-\alpha \in \Phi$, si entre $\pm\alpha$ elegimos solo una, tenemos $n(n-1)/2$ de ellas. Podemos descomponer a \mathfrak{g} como suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} \right) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \langle E_{ij} \rangle_{\mathbb{C}} \right), \text{ donde}$$

$$\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \{X \in \mathfrak{g} | \text{ad}_H(X) = (e_i - e_j)(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}, \text{ o bien}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | \text{ad}_H(X) = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Estos espacios se llaman espacios de raíz correspondientes a la raíz $\alpha = e_i - e_j$, como vimos al calcular ad_H los E_{ij} (y sus múltiplos escalares) son los elementos de éstos espacios, es decir $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \langle E_{ij} \rangle_{\mathbb{C}}$. Esto muestra que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ en la definición de los \mathfrak{g}_α . Calculemos los corchetes en la descomposición anterior. Por ejemplo $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$, ya que

$$(E_{12}E_{23})_{ij} = \sum_{k=1}^n (E_{12})_{1k}(E_{23})_{kj},$$

con $(E_{12})_{ik} = 0$ salvo que $i = 1$ y $k = 2$, también $(E_{23})_{kj} = 0$ a menos que $k = 2$ y $j = 3$, luego $(E_{12}E_{23})_{ij} = 0$ si $i \neq 1$ y $j \neq 3$, además $(E_{12}E_{23})_{13} = 1$. Teniendo en cuenta esto se hace un cálculo similar y se obtiene $E_{23}E_{12} = 0$. Note que $(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3$, luego $[\mathfrak{g}_{e_1-e_2}, \mathfrak{g}_{e_2-e_3}] \subset \mathfrak{g}_{e_1-e_3}$.

En general:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l, j \neq k \\ E_{il} & \text{si } i \neq l, j = k \\ -E_{kj} & \text{si } i = l, j \neq k \\ E_{ii} - E_{jj} & \text{si } i = l, j = k \end{cases}$$

Escrito en términos de los \mathfrak{g}_α lo anterior se ve como:

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es raíz} \\ = 0 & \text{si } \alpha + \beta \text{ no es raíz (ni cero)} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{si } \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Todas las raíces tienen valor real en \mathfrak{h}_0 y en consecuencia se pueden restringir a los elementos de \mathfrak{h}_0^* . Nótese además que las raíces reales generan a \mathfrak{h}_0 pero no conforman una base de este espacio, pues $e_1 + \dots + e_n = \text{tr} \equiv 0$ en \mathfrak{h} , luego si $\phi \in \mathfrak{h}_0$ no necesariamente tiene escritura única como combinación lineal de los e_i , $\sum_i a_i e_i$. Esta escritura es única si se restringen los escalares de tal manera que $\sum_i a_i = 0$.

Nuestro objetivo ahora es establecer un orden para las raíces que nos brinde una noción de positividad, es decir que si $\phi \in \mathfrak{h}_0^*$, entonces ϕ o $-\phi$ es positivo y que la suma y múltiplos positivos de elementos positivos sean positivos. La escritura única de cada $\phi \in \mathfrak{h}_0^*$ nos permite munir a \mathfrak{h}_0^* con el orden léxicográfico, es decir, si $0 \neq \phi, \phi = \sum_i a_i e_i$, con $\sum_i a_i = 0$ es positivo (> 0) si el primer $0 \neq a_i > 0$. De este modo decimos que $\phi > \psi$ si

$\phi - \psi > 0$. Este orden en \mathfrak{h}_0^* para las raíces positivas es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 e_1 - e_n & > & e_1 - e_{n-1} & > & \dots & > & e_1 - e_2 & > \\
 & > & e_2 - e_n & > & \dots & > & e_2 - e_3 & > \\
 & & & > & \dots & > & \dots & > \\
 & & & > & e_{n-2} - e_n & > & e_{n-2} - e_{n-1} & > \\
 & & & & & > & e_{n-1} - e_n & > & 0
 \end{array}$$

Todas las negativas continúan en orden invertido respecto a las positivas. A las raíces positivas que no son suma de otras raíces positivas las llamaremos raíces simples y son $e_i - e_{i+1}$ con $1 \leq i \leq n - 1$. Podemos ver la correspondencia entre la raíz $e_i - e_j$ y la matriz $H_{ij} \in \mathfrak{h}_0$, H_{ij} es la matriz diagonal que tiene en la entrada i -ésima de la diagonal un 1, -1 en la j -ésima y 0 en todas las demás. Así, podemos calcular las entradas de una matriz A de la siguiente manera.

$$A_{kl} = \frac{2(e_k - e_{k+1})(H_{l,l+1})}{(e_k - e_{k+1})(H_{k,k+1})}.$$

Como

$$(e_k - e_{k+1})(H_{l,l+1}) = \begin{cases} 2 & \text{Si } k = l \\ -1 & \text{Si } l = k + 1 \text{ o } k = l + 1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

se tiene que la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

A una matriz de este tipo le podemos asignar un diagrama de Coxeter-Dynkin de tipo A_n .

En el ejemplo vimos varios elementos. Una clase especial de subálgebras para un álgebra de Lie, una descomposición en espacios de peso (que llamamos raíces) respecto a esa

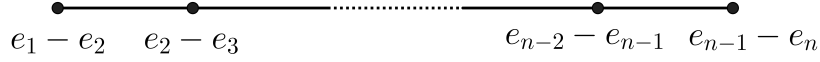


Figura 2.1: Diagrama de Dynkin correspondiente a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

subálgebra y la representación adjunta de ella, algunas propiedades de los espacios de peso, un orden para las raíces que induzca la noción de raíces simples por medio de la positividad, un producto interno que nos permite calcular una matriz y un grafo asociado a ella.

Traslademos el concepto de peso a un álgebra de Lie cualquiera y la representación adjunta. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{C} y \mathfrak{h} una subálgebra nilpotente de \mathfrak{g} . Por el Teorema de Engel, $\text{ad}(\mathfrak{h})$ es un álgebra de Lie de endomorfismos del espacio vectorial \mathfrak{g} . Una forma lineal $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ es un peso de \mathfrak{g} para \mathfrak{h} por $\text{ad}(\mathfrak{h})$ si existe $X \in \mathfrak{g}$ no nulo tal que $(\text{ad}_H - \alpha(H))^n X = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ y algún $n \in \mathbb{N}$. Al conjunto de estos vectores (incluyendo el vector 0) se le conoce como espacio de peso α .

Con \mathfrak{g} y \mathfrak{h} como antes, en el Teorema 2.5.3 al tomar $\text{ad}\mathfrak{h}$, que es un álgebra nilpotente de endomorfismos, \mathfrak{g} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Entonces existe un conjunto finito $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ tal que

- (1) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, es decir \mathfrak{g} se descompone como suma directa de sus espacios de peso.
- (2) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$.
- (3) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

En efecto, (1) es la adaptación directa del Teorema 2.5.3 a cualquier álgebra de Lie y la representación adjunta, (2) basta notar que \mathfrak{g}_0 siempre existe y es distinta de 0, pues el Teorema de Engel establece que todo elemento de un álgebra nilpotente es ad-nilpotente.

Luego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Además si $\text{ad}_H(X) = \alpha(H)X$ y $\text{ad}_H(Y) = \beta(H)Y$, entonces

$$\begin{aligned} \text{ad}_H[X, Y] &= [H, [X, Y]] = [[H, X], Y] + [X, [H, Y]] = [\alpha(H)X, Y] + [X, \beta(H)Y] \\ &= (\alpha + \beta)(H)[X, Y], \end{aligned}$$

con lo que concluimos (3). Nótese que $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$ si $\alpha + \beta \notin \Delta$. Como consecuencia \mathfrak{g}_0 es una subálgebra de \mathfrak{g} .

Una subálgebra \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice que es de *Cartan* si es nilpotente y coincide con su normalizador. En [Ro](capítulo 6, sección 1) se prueba que \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} si y sólo si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, donde \mathfrak{g}_0 es la componente nula en la descomposición de Fitting respecto a $\text{ad}(\mathfrak{h})$. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2. *Toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una subálgebra de Cartan.*

Además, si \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' son subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja \mathfrak{g} de dimensión finita, entonces existe un automorfismo φ interior de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{h}' = \varphi(\mathfrak{h})$. En consecuencia dos subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja son isomorfas y se dice que son conjugadas vía φ . Por lo tanto, tienen la misma dimensión a la cual llamamos *rango de \mathfrak{g}* .

El Teorema 2.6.2 es de gran valor en nuestro camino, pues garantiza la existencia de las “raíces” en el siguiente sentido. Dada un álgebra semisimple \mathfrak{g} con forma de Killing K y una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} fija, al conjunto finito de pesos de $\text{ad}(\mathfrak{h})$ en \mathfrak{g} , $\Delta - \{0\}$ se le llama *sistema de raíces* y un elemento de este conjunto se llama *raíz*. Así, la descomposición de \mathfrak{g} en espacios de peso se llama *descomposición en espacios de raíz* y tiene la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta - \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Veamos algunas propiedades de las raíces y los espacios de raíz (algunos sin demostración) que nos permiten estudiar las álgebras de Lie semisimples.

1. Si $\pm\alpha$ son raíces, entonces, si $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ entonces $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$.

Esto es una consecuencia de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

2. Si $\alpha, \beta \in \Delta$ y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$. Es decir cualesquier par de espacios de raíz para α y β en Δ son ortogonales respecto a la forma de Killing, en particular \mathfrak{h} es ortogonal a todo \mathfrak{g}_α para $\alpha \neq 0$.

En efecto, $\text{ad}_{X_\alpha} \text{ad}_{X_\beta}$ mapea cada \mathfrak{g}_μ en $\mathfrak{g}_{\mu+(\alpha+\beta)} \neq \mathfrak{g}_\mu$, luego su traza es cero. Es decir $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

3. Para cualquier $\alpha \in \Delta$, $-\alpha \in \Delta$. Más aún, la restricción $K : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow k$ es no degenerada.

Si $\alpha \in \Delta$ y $-\alpha$ no es una raíz, entonces \mathfrak{g}_α es ortogonal a cualquier otro \mathfrak{g}_β , en consecuencia $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$, lo que contradice que \mathfrak{g} sea semisimple.

4. Para cualquier $\alpha \in \Delta$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$.

Basta notar que $0 \neq K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = K([\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha], \mathfrak{g}_{-\alpha}) = K(\mathfrak{h}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$.

5. Las raíces generan a \mathfrak{h}^* .

En otro caso, existiría $0 \neq H \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, luego $\text{ad}_H Y = 0$ para todo Y , lo que indica que $H \in Z(\mathfrak{g})$, pero $Z(\mathfrak{g}) = 0$ pues \mathfrak{g} es semisimple.

6. La restricción de la forma de Killing a la subálgebra de Cartan es no degenerada y definido positiva.

Si no lo fuese, existiría $H_1 \in \mathfrak{h}$ tal que $K(H_1, H) = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, pero además H_1 es ortogonal a todo elemento de cualquier \mathfrak{g}_α , luego $K(H_1, \mathfrak{g}) = 0$, contradiciendo que la forma de Killing es no degenerada. Como consecuencia, para cada raíz α existe un único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(H) = K(H, H_\alpha)$ para todo α en \mathfrak{g} por el Teorema de representación de Riesz. Esto nos permite definir un producto interno en \mathfrak{h}^* , dados $\phi, \varphi \in \mathfrak{h}^*$,

$$\langle \phi, \varphi \rangle := K(H_\phi, H_\varphi) = \phi(H_\varphi) = \varphi(H_\phi).$$

7. Si $\alpha \in \Delta - \{0\}$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Además, si $\alpha \in \Delta$ y $n\alpha \in \Delta$ con $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n = \pm 1$.

Nótese que por esta propiedad, la descomposición de un álgebra de Lie respecto a una subálgebra de Cartan y la representación adjunta es muy similar a la descomposición de grupos abelianos como la suma de la parte de torsión y la parte libre de torsión.

8. Fijemos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\alpha \neq 0$ para cada $\alpha \in \Delta$ tal que $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Si $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ entonces $[X_\alpha, Y] = K(X_\alpha, Y)H_\alpha$ y H_α es el elemento mencionado en el ítem (6).

En efecto, si $H \in \mathfrak{h}$ y X_α, Y son como en el enunciado, entonces

$$\begin{aligned} K(H, [X_\alpha, Y]) &= K([H, X_\alpha], Y) \\ &= \alpha(H)K(X_\alpha, Y) \\ &= K(H, H_\alpha)K(X_\alpha, Y) \\ &= K(H, K(X_\alpha, Y)H_\alpha). \end{aligned}$$

Y por ser la restricción de K en \mathfrak{h} no degenerada, se concluye $[X_\alpha, Y] = K(X_\alpha, Y)H_\alpha$.

9. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $\alpha(H_\alpha) \neq 0$.

Esto implica que $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$. Si consideramos $T_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$, este es el único elemento tal que $\alpha(T_\alpha) = 2$.

10. Si $H, H' \in \mathfrak{h}$ entonces $K(H, H') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)\alpha(H')$.

En efecto, como \mathfrak{h} es un álgebra nilpotente, sabemos que en una base adecuada las matrices que representan a ad_H son triangulares superiores, además $\text{ad}_H|_{\mathfrak{g}_\alpha}$ tiene como único autovalor a $\alpha(H)$, luego su traza en la restricción es $\dim \mathfrak{g}_\alpha \alpha(H)$. Si $H, H' \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}_H \text{ad}_{H'}$ se representa por medio de una matriz triangular superior y su traza es

$$K(H, H') = \text{tr}(\text{ad}_H, \text{ad}_{H'}) = \sum_{\alpha \in \Delta} \dim \mathfrak{g}_\alpha \alpha(H)\alpha(H').$$

Como $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, hemos probado la afirmación.

11. Para el producto interno definido en \mathfrak{h}^* , si $\alpha, \beta \in \Delta$ entonces $\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$.

En [Ro] (capítulo 6, sección 3) se estudian las representaciones finitas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de manera detallada, dando los argumentos para la veracidad de esta afirmación.

12. Si llamamos V al espacio generado \mathbb{R} -lineal de Δ en \mathfrak{h}^* , entonces V es una forma real del espacio vectorial \mathfrak{h}^* y la restricción de la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $V \times V$ es definida positiva. Sea \mathfrak{h}_0 el generado \mathbb{R} -lineal de los H_α para $\alpha \in \Delta$, entonces \mathfrak{h}_0 es una forma real del espacio vectorial \mathfrak{h} y los elementos de V son exactamente los funcionales lineales que son reales en \mathfrak{h}_0 .

Esta afirmación es bastante importante, pues nos permite dotar a \mathfrak{h}^* (en particular a Δ) con el orden léxicográfico, que como sabemos nos permite dar una noción de positividad en Δ al ser \mathbb{R} un cuerpo ordenado con la misma noción. Como Δ genera a \mathfrak{h}^* , entonces contiene una base de \mathfrak{h}^* , luego, definimos las raíces positivas como aquellos elementos de Δ cuyo primer escalar no nulo en la escritura como combinación lineal es positivo. Además, este resultado también enuncia que los pesos de un álgebra de Lie semisimple respecto a una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} están en \mathfrak{h}_0^* y $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$.

13. Para cada $\alpha \in \Delta$, consideremos la aplicación $\sigma_\alpha : \mathfrak{h}_0^* \rightarrow \mathfrak{h}_0^*$ definida por

$$\sigma_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{2\langle\varphi, \alpha\rangle}{|\varphi|^2}\alpha,$$

donde $|\varphi|^2 = \langle\varphi, \varphi\rangle$. La aplicación σ_α es la reflexión con respecto al plano que tiene como vector normal a α . La aplicación σ_α es lineal para cada α .

Las reflexiones σ_α para $\alpha \in \Delta$ dejan a Δ invariante, es decir $\sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$.

En particular, el grupo W generado por $\{\sigma_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ es un subgrupo que está embebido en el grupo simétrico de Δ y por lo tanto es finito. El grupo W se llama *el grupo de Weyl*.

14. Si $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, la α -cuerda que contiene a β son los elementos de la forma $\alpha + t\beta; t \in \mathbb{Z}$. En Δ la α -cuerda que contiene a β es de la forma $\alpha + n\beta, -p \leq n \leq q$ con $p \geq 0$ y $q \geq 0$ y hay a lo sumo 4 elementos en Δ sin espacios en la cadena. Además $p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$.

2.7. Sistemas abstractos de raíces y su clasificación

Un subconjunto Δ en un espacio de dimensión finita V con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se llama un *sistema abstracto reducido de raíces* si es un conjunto finito de vectores no nulos que satisfacen los siguientes axiomas:

R1) Δ genera a V .

R2) Las reflexiones ortogonales $\sigma_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{2\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$, para cada $\alpha \in \Delta$ dejan invariante a Δ .

R3) El número $\frac{2\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$ es entero para todos $\alpha, \beta \in \Delta$.

R4) $\alpha \in \Delta$ implica $2\alpha \notin \Delta$.

R4') Si $\alpha \in \Delta$, los únicos múltiplos de α en Δ son $\pm\alpha$. Esta condición puede sustituir a R4).

Sin la condición R4, o R4', el sistema abstracto de raíces se llama *no reducido*.

Teniendo en cuenta que el espacio vectorial \mathfrak{h}_0^* definido en la Propiedad 12 es real, finito dimensional y tiene producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, junto con las otras propiedades, nos dicen que el siguiente resultado es válido.

Teorema 2.7.1. *El sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple compleja respecto de una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} es un sistema abstracto reducido de raíces en \mathfrak{h}_0^* .*

Este resultado es importante, pues afirma que a un álgebra de Lie semisimple compleja se le puede asociar un sistema abstracto reducido de raíces en un espacio vectorial real de dimensión finita. Veremos que estos sistemas se pueden clasificar.

Dos sistemas abstractos de raíces Δ en V y Δ' en V' son isomorfos si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\phi(\Delta) = \Delta'$ y

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = \frac{2\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle}{|\phi(\alpha)|^2},$$

para $\alpha, \beta \in \Delta$.

Del Teorema 2.7.1, se nos hace claro que los sistemas abstractos de raíces sobre un espacio euclídeo V comparten propiedades con los sistemas de raíces para un álgebra de Lie semi-simple compleja respecto a una subálgebra de Cartan. Expondremos esto a continuación, sin dar prueba de algunos de estos hechos. Sea Δ un sistema abstracto de raíces.

1. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $-\alpha \in \Delta$.
2. Si $\alpha \in \Delta$, entonces los únicos miembros de $\Delta \cup \{0\}$ proporcionales a α son $0, \pm\alpha$ y $\pm 2\alpha$, teniendo en cuenta que el último no ocurre si Δ es reducido.
3. Si $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, entonces $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ y el caso ± 4 se tiene solo en el caso que el sistema no es reducido, es decir, $\beta = \pm 2\alpha$.

En efecto, la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que

$$\left| \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} \cdot \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{|\beta|^2} \right| \leq 4 \frac{|\alpha||\beta||\beta|\alpha|}{|\alpha|^2|\beta|^2} = 4,$$

y la igualdad se tiene solo si $\beta = \pm\alpha$, y en éste caso $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = \pm 2$, luego $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = \pm 4$ sólo si $\beta = \pm 2\alpha$. En el caso de la no igualdad, es claro que $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

4. Si $\beta \neq \pm\alpha$ y $|\alpha| \geq |\beta|$, entonces $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 0, \pm 1$.

Esto es claro de la desigualdad

$$\left| \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{|\beta|^2} \right| \geq \left| \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} \right|,$$

teniendo en cuenta que el producto de los dos términos en ella es menor o igual que 3 y ambos no son 2 consecutivamente por el análisis anterior, luego el menor de los términos es menor o igual que 1.

5. Si $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$, entonces $\alpha - \beta \in \Delta \cup \{0\}$. Si $\langle\alpha, \beta\rangle < 0$, entonces $\alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\}$.

6. Si $\alpha, \beta \in \Delta$ y ninguno $\alpha + \beta$ ni $\alpha - \beta$ son raíces o cero, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.
7. Si $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, entonces la α -cuerda que contiene a β tiene la forma $\alpha + n\beta$, con $-p \leq n \leq q$, $p \geq 0$ y $q \geq 0$ y hay a lo sumo 4 raíces en la cadena. Además, $p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$.

El siguiente concepto es el de raíz simple, dijimos que Δ genera a \mathfrak{h}_0^* , y por tanto a \mathfrak{h}^* . Luego contiene una base para \mathfrak{h}_0^* , que lo es también para \mathfrak{h}^* , digamos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Así, dado un peso α , este se escribe como combinación lineal de los φ_i , es decir, $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$. Decimos que el funcional α es *positivo* ($\alpha > 0$), si existe un índice j tal que $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq j$ y $a_j > 0$, de otro modo, α es *negativo* ($\alpha < 0$). Así, establecemos una relación de orden lineal en el conjunto de pesos, donde $\alpha > \beta$, si $\alpha - \beta > 0$. Es claro que éste orden preserva la noción de positividad como insistimos en el ejemplo 2.6.1 y también que descompone a Δ como $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ de manera disjunta donde Δ^+ y Δ^- son los conjuntos de raíces positivas y negativas respectivamente.

Definimos una *raíz simple* como una raíz positiva α que no se puede escribir como suma de otras raíces positivas.

Lema 2.7.2. *Si α, β son raíces simples distintas, entonces $\alpha - \beta \notin \Delta$ y $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.*

En efecto, $\alpha - \beta = \gamma$ no puede ser una raíz positiva, pues si lo fuera, entonces $\alpha = \beta + \gamma$ y esto contradice que α es una raíz simple, γ tampoco puede ser negativa pues $-\gamma$ es positiva y $\beta = -\gamma + \alpha$. Para la segunda parte consideremos la α -cuerda que contiene a β , como $\alpha - \beta$ no es una raíz, entonces $q = 0$ y como

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{|\beta|^2} = q - p = -p \leq 0,$$

siguiéndose que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$, pues $|\beta|^2 > 0$.

Observación 2.7.3. Vale la pena destacar que la afirmación de éste lema es análoga a el Lema 1.2.4, presentado en la clasificación de los retículos de raíz.

Al conjunto de las raíces simples lo denotaremos como Π , y llamaremos *sistema fundamental de raíces* a todo conjunto $\Pi \subset \Delta \subset V$, con V un espacio euclídeo que cumpla las siguientes propiedades:

1. Π es una base de V como espacio vectorial.
2. Cada raíz $\beta \in \Delta$ se escribe como $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ con todos los coeficientes a_α enteros y todos no negativos ó todos no positivos.

Observación 2.7.4. Es así que llegamos a la siguiente proposición, análoga a los Lemas 1.2.2 y 1.2.6 expuestos en el capítulo anterior. Una conclusión de la proposición es que si $\dim V = n$ entonces hay n raíces simples las cuales forman una base para V .

Lema 2.7.5. Si $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ es el conjunto de raíces simples, entonces Π es un conjunto linealmente independiente. Aún más, todo $\beta \in \Delta^+$ descompone como $\beta = a_1\alpha_1 + \dots + a_l\alpha_l$ con todos los a_i no negativos.

Veamos primero, que Π es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que un α_i se puede escribir como combinación lineal de las demás, digamos, α_1 . Separamos la combinación lineal en dos partes, la que lleva coeficientes positivos y la que lleva coeficientes negativos, es decir $\alpha_1 = \beta - \gamma$, donde β y γ son combinaciones lineales de raíces simples con coeficientes positivos. Es claro que toda raíz simple aparece en β o en γ (o en ninguna si su escalar es cero), pero no en ambas. Se sigue que $\langle \beta, \gamma \rangle \leq 0$ y $\langle \alpha_1, \beta \rangle \leq 0$. Ahora bien, $\langle \alpha_1, \beta \rangle = \langle \beta - \gamma, \beta \rangle = |\beta|^2 - \langle \beta, \gamma \rangle > 0$, lo que es una contradicción, pues $\langle \alpha_1, \beta \rangle \leq 0$. Así que las raíces simples son linealmente independientes.

Para la segunda parte, la prueba es idéntica a la prueba del Lema 1.2.2. Falta resaltar que si $\beta \in \Delta^-$ entonces $-\beta \in \Delta^+$ y los α_i la generan con escalares todos no positivos, luego Π genera Δ y por lo tanto Π es una base para V , es decir $l = n$.

Así las cosas, es claro que un conjunto de raíces simples Π es un sistema fundamental de raíces, el recíproco de este hecho también es cierto. Todo sistema fundamental de raíces es un sistema de raíces simples para un orden adecuado (el orden léxicográfico para la

base del sistema fundamental). En adelante no distinguiremos un sistema fundamental de raíces de uno de raíces simples.

Ahora estableceremos la relación entre un sistema fundamental Π de un álgebra de Lie semisimple y el álgebra de Lie en cuestión.

Proposición 2.7.6. *Sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un sistema fundamental de raíces de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} . Entonces los $E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}, E_{-\alpha_1}, \dots, E_{-\alpha_n}$ generan a \mathfrak{g} como álgebra de Lie, donde $E_{\alpha}, E_{-\alpha}$ son los escogidos de tal forma que $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = T_{\alpha}$ y T_{α} es el único elemento en \mathfrak{h} tal que $\alpha(T_{\alpha}) = 2$.*

Un sistema abstracto de raíces Δ en V es *descomponible* si Δ admite una descomposición no trivial disjunta $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ con cada elemento de Δ' ortogonal a cada elemento de Δ'' . Δ es *indescomponible* si no admite tal descomposición. Esta misma noción aplica para el sistema fundamental de raíces Π . Aún más, de ésta definición se deriva que Δ es indescomponible si y sólo si Π es indescomponible.

De acuerdo al Teorema 2.4.10 y la Proposición 2.7.6 que el sistema fundamental de raíces Π es indescomponible si y sólo si \mathfrak{g} es simple. De igual manera, el sistema abstracto de raíces Δ es indescomponible si y solo si \mathfrak{g} es simple.

Un elemento de vital importancia en el estudio de las álgebras de Lie semisimples es la *matriz de Cartan*, que reúne toda la información necesaria para determinar el álgebra de Lie. Consideremos Δ un sistema abstracto reducido de raíces en un espacio euclídeo real de dimensión n y sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ el conjunto de raíces simples para un orden establecido. La matriz $A = (A_{ij})$ dada por

$$A_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^2}$$

se llama la *matriz de Cartan de Δ y Π* . Esta matriz depende del orden de las raíces simples, pero distintos órdenes producen matrices de Cartan que son conjugadas por matrices

de permutación¹.

La matriz de Cartan $A = (A_{ij})$ de Δ y Π tiene las siguientes propiedades:

1. A_{ij} es entero para todos i, j .
2. $A_{ii} = 2$ para todo i .
3. $A_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$.
4. $A_{ij} = 0$ si y sólo si $A_{ji} = 0$.
5. Existe una matriz diagonal D con entradas enteras positivas tal que DAD^{-1} es simétrica y definida positiva.

Una matriz cuadrada A que satisfaga las propiedades mencionadas se llama *matriz de Cartan abstracta*. Dos matrices de Cartan abstractas son *isomorfas* si son conjugadas por una matriz de permutación. A ojos de esta definición, la matriz de Cartan de Δ y Π es una matriz de Cartan abstracta, así podemos dar la noción de sistemas de raíces simples isomorfos. Dos sistemas de raíces simples Π y Π' son isomorfos si sus matrices de Cartan son isomorfas.

Ejemplo 2.7.7. *Las matrices de Cartan (salvo conjugaciones) para rango 2 son:*

$$A_1 \times A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ver que para un sistema abstracto de raíces Δ , la elección de un sistema de raíces Π lleva a matrices de Cartan isomorfas, recordemos el grupo de Weyl W , generado por las reflexiones ortogonales σ_α . Si Π es un sistema de raíces simples, cada σ_α está determinada por su aplicación a los elementos en Π , ya que son lineales y Π genera a Δ . Además el grupo de Weyl está generado por las reflexiones σ_{α_i} donde $\alpha_i \in \Pi$. Luego, dados Π y

¹Una matriz de permutación P consiste de 0 y 1's en sus entradas, al conjugar por P se obtiene la matriz en la base nueva que no es mas que una reordenación de la base anterior

Π' dos sistemas de raíces simples en Δ , y teniendo en cuenta que $\sigma(\Delta) \subset \Delta$ para todo $\sigma \in W$, podemos concluir que existe un único elemento $\sigma \in W$ tal que $\sigma(\Pi) = \Pi'$. En consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.7.8. *Sea Δ un sistema abstracto de raíces y sean Δ^+ y $\Delta^{+'}$ dos conjuntos de raíces positivas, con sistemas de raíces simples Π y Π' respectivamente. Entonces las matrices de Cartan de Π y Π' son isomorfas.*

Sea $\sigma \in W$ el único elemento tal que $\sigma(\Pi) = \Pi'$ y fijemos una enumeración de $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y de $\Pi' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ tal que $\beta_j = \sigma(\alpha_j)$ para $j = 1, \dots, n$, entonces se tiene que

$$\frac{2\langle\beta_i, \beta_j\rangle}{|\beta_i|^2} = \frac{2\langle\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j)\rangle}{|\sigma(\alpha_i)|^2} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{|\alpha_i|^2}$$

puesto que σ no cambia el producto interno al ser ortogonal y en consecuencia las matrices de Cartan son iguales al hacer la permutación de índices como sugerimos, luego en realidad son isomorfas.

En contraste a éste resultado, podemos preguntarnos qué sucede si tenemos dos sistemas de raíces no isomorfos. En respuesta tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.7.9. *Sean Δ y Δ' dos sistemas abstractos reducidos de raíces no isomorfos con sistemas de raíces simples Π y Π' respectivamente. Entonces las matrices de Cartan A de Δ y Π y A' de Δ' y Π' no son isomorfas.*

El resultado es consecuencia inmediata de la definición de sistemas de raíces no isomorfos, pues no existe una aplicación $\phi : V \rightarrow V'$ para la cual $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\beta|^2} = \frac{2\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle}{|\phi(\beta)|^2}$ para cualesquier $\alpha, \beta \in \Delta$ (o Π), luego sus matrices de Cartan no podrán ser isomorfas para enumeración alguna en Π y Π' .

Ya está bien establecido lo relacionado a sistemas abstractos de raíces y matrices de Cartan, luego no tenemos ambigüedades al decir que una matriz de Cartan determina un sistema de raíces simples (y por tanto un sistema abstracto de raíces) de manera única, salvo isomorfismos. Además, las propiedades de las matrices de Cartan de Δ y Π nos

permiten asociarle un grafo de la siguiente manera. Cada raíz simple α_i será un vértice del grafo, los vértices α_i y α_j se conectarán con el número de aristas $A_{ij}A_{ji}$, es decir, dos vértices pueden estar desconectados o conectados por medio de una, dos o tres aristas, en el caso de tener más de una arista, se dibujará una flecha sobre la arista apuntando hacia la raíz más larga, veamos esto en más detalle:

$$A_{ij}A_{ji} = 4 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle^2}{|\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2} = 4 \cos^2(\omega),$$

donde ω es el ángulo entre α_i y α_j . Entonces hay cuatro opciones:

- a. $A_{ij}A_{ji} = 0$, luego $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$. Las raíces son ortogonales y no están conectados sus vértices correspondientes en el grafo.
- b. $A_{ij}A_{ji} = 1$. La única posibilidad es $A_{ij} = A_{ji} = -1$, entonces las dos raíces tienen la misma longitud ($|\alpha_i|^2 = |\alpha_j|^2$) y $\omega = \frac{\pi}{3}$. Los vértices α_i, α_j se conectan por medio de una arista.
- c. $A_{ij}A_{ji} = 2$. La opción es $A_{ij} = -2, A_{ji} = -1$, las raíces tienen distinta longitud ($|\alpha_i|^2 = 2|\alpha_j|^2$) y $\omega = \frac{3\pi}{4}$. Los vértices se conectan con dos aristas y la flecha apunta al vértice α_i .
- d. $A_{ij}A_{ji} = 3$. La opción es $A_{ij} = -3, A_{ji} = -1$, las raíces tienen distinta longitud ($|\alpha_i|^2 = 3|\alpha_j|^2$) y $\omega = \frac{5\pi}{6}$. Los vértices se conectan con tres aristas y la flecha apunta al vértice α_i .

A este grafo lo llamamos el *diagrama de Dynkin* de Π o simplemente, diagrama de Dynkin, si omitimos la flecha en las aristas, se llama *diagrama de Coxeter*. Denotaremos el diagrama de Dynkin de Π por $\mathcal{D}(\Pi)$.

Clasificaremos los sistemas fundamentales Π por medio de estos diagramas, pero primero observemos las dos operaciones siguientes que podemos hacer en los diagramas y su contraparte en las matrices de Cartan.

1. Remover el i -ésimo vértice y todas las aristas ligadas a él en el diagrama de Dynkin. En la matriz de Cartan, esta operación se traduce en eliminar la i -ésima fila y columna de la matriz.
2. Si el i -ésimo y el j -ésimo vértice están conectados por una arista y sus longitudes son iguales, colapsamos los vértices en uno solo, manteniendo todas las otras aristas ligadas a éstos. Su contraparte en la matriz, colapsa la i -ésima fila y la j -ésima columna

Estas operaciones hacen diagramas de Dynkin de diagramas de Dynkin y matrices de Cartan de matrices de Cartan. Teniendo en cuenta estas operaciones y las propiedades que definen las matrices de Cartan, podemos deducir el siguiente lema, sin necesidad de probarlo.

Lema 2.7.10. *El diagrama de Dynkin asociado a una matriz de Cartan $n \times n$ A tiene las siguientes propiedades:*

- (1) *Hay a lo más n pares de vértices conectados.*
- (2) *El diagrama no contiene ciclos.*
- (3) *Hay a lo más tres aristas ligadas a un vértice.*

Este resultado nos brinda más herramientas para clasificar los diagramas de Dynkin, una de ellas es el siguiente resultado.

Lema 2.7.11. *Los grafos en la Figura 2.2 no están contenidos en un diagrama de Dynkin.*

En efecto, de estar contenidos al aplicar la Operación 2, se contradice el Item (3) del Lema 2.7.10.

Si consideramos que el diagrama de Dynkin es conexo, este corresponderá a un sistema fundamental Π indescomponible y viceversa. En consecuencia los diagramas de Dynkin conexos corresponden a álgebras de Lie simples. Los posibles diagramas son los que se presentan en la Figura 2.3.

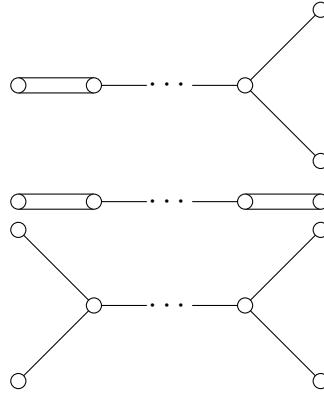


Figura 2.2: Grafos no contenidos en un diagrama de Dynkin.

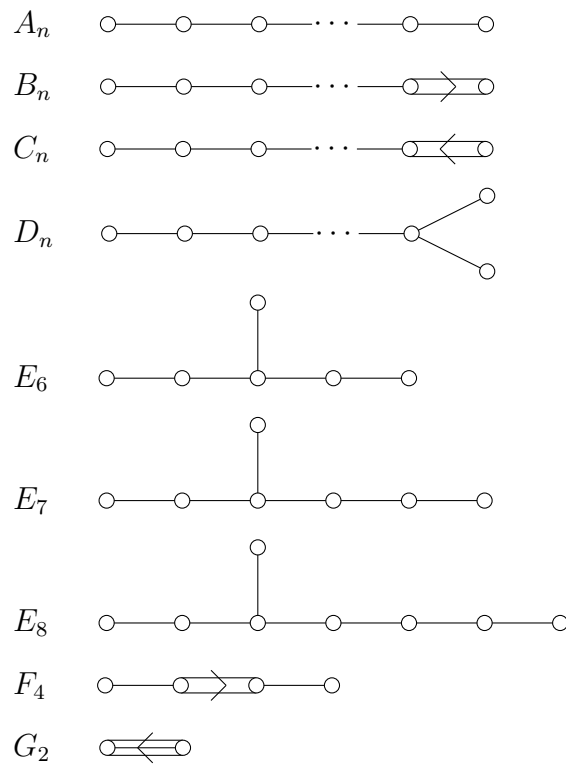


Figura 2.3: Posibles diagramas de Dynkin.

Consideremos $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, la base canónica de \mathbb{R}^n .

Si pensamos que el diagrama de Dynkin tiene todos sus vértices conectados por medio de una sola arista entre cada par (conectado), entonces el diagrama general tiene la forma expuesta en la Figura 1.5 y ya vimos que ésta nos lleva a los diagramas de los tipos A_n , D_n , E_6 , E_7 y E_8 , para los cuales ya expusimos los sistemas de raíces y que en efecto corresponden a los diagramas.

Ahora, por el Item (3) del Lema 2.7.10, la única opción para un diagrama con tres aristas conectando dos vértices es uno del tipo G_2 . En \mathbb{R}^3 consideremos $\alpha_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ y $\alpha_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1$, la primera raíz es larga. Estos vectores son linealmente independientes y son una base para un espacio vectorial real isomorfo a \mathbb{R}^2 , computando las entradas de la matriz de Cartan obtenemos la siguiente matriz, a la cual se le puede asociar un diagrama de tipo G_2 .

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, si pensamos en las configuraciones con pares de vértices conectados por medio de dos aristas, de los Lemas 2.7.10 y 2.7.11, tenemos que las únicas opciones viables son diagramas de los tipos B_n , C_n y F_4 .

Expongamos primero F_4 . En \mathbb{R}^4 , las raíces simples son $\alpha_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\alpha_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$, $\alpha_3 = \mathbf{e}_4$ y $\alpha_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$. Al calcular las entradas de la matriz de Cartan, obtenemos que en efecto se le puede asociar un diagrama del tipo F_4 .

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, si consideramos, en \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^{n+1} según el caso, el sistema de raíces simples

$$\alpha_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \dots, \alpha_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_{n-2}$$

A_n, D_n, B_n y C_n se obtienen según como se elija la última raíz,

$$A_n : \alpha_n = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n+1}.$$

$$D_n : \alpha_n = \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n.$$

$$B_n : \alpha_n = \mathbf{e}_n.$$

$$C_n : \alpha_n = 2\mathbf{e}_n.$$

Ya vimos las matrices de Cartan de A_n y D_n en el capítulo anterior, las matrices de Cartan de B_n y C_n son las siguientes:

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

luego se les puede asociar diagramas de tipo B_n y C_n respectivamente.

Eso concluye la clasificación de los diagramas de Dynkin en el caso conexo, es claro que el caso desconexo se obtiene al poner los posibles diagramas de Dynkin requeridos uno junto a otro, esto es, el sistema fundamental Π es descomponible como suma ortogonal de los sistemas Π_i correspondientes a cada componente conexa del diagrama de Dynkin, lo que es coherente con el Teorema 2.4.10 donde nos dicen que toda álgebra de Lie semisimple compleja se descompone como suma directa (en la prueba se evidencia que es ortogonal) de sus ideales simples. Esta descomposición, lleva a la descomposición del sistema fundamental Π como suma ortogonal, pues $\Pi \cap \mathfrak{g}_i := \Pi_i$ es un sistema fundamental para \mathfrak{g}_i y así $\Pi = \bigcup_i \Pi_i$, donde $\langle \Pi_i, \Pi_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Para terminar la clasificación veamos los siguientes resultados de existencia e isomorfía.

Teorema 2.7.12 (Existencia). *Si A es una matriz de Cartan abstracta, entonces existe un álgebra de Lie semisimple compleja cuyos sistemas de raíz y fundamental tienen a A*

como matriz de Cartan.

Este resultado es consecuencia de la Proposición 2.7.6 y observaciones hechas cuando expusimos las matrices Cartan.

Teorema 2.7.13 (Isomorfía). *Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' álgebras de Lie simples complejas, sean \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' respectivamente, y Δ y Δ' los sistemas de raíces correspondientes. Si Δ y Δ' son isomorfos, entonces se induce un único isomorfismo de Lie entre \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' que envía a \mathfrak{h} en \mathfrak{h}' .*

Si consideramos un isomorfismo $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$, este induce un isomorfismo en los correspondientes espacios ambiente \mathfrak{h}_0^* y $\mathfrak{h}_0'^*$ (extensión lineal), como para ser un isomorfismo de sistemas de raíces, el producto interno no cambia esencialmente, puede asumirse que el isomorfismo es una isometría.

Además, como \mathfrak{h}_0^* y $\mathfrak{h}_0'^*$ son formas reales de \mathfrak{h}^* y \mathfrak{h}'^* respectivamente, al complexificar, se extiende φ a un isomorfismo entre \mathfrak{h}^* y \mathfrak{h}'^* . Vimos que via la forma de Killing, identificamos a \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' con sus duales. Es decir, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ existe un único H_α tal que $\alpha(\cdot) = K(H_\alpha, \cdot)$, además φ viene de una isometría y que $T_\alpha = \frac{2H_\alpha}{|\alpha|^2}$, entonces $\varphi(T_\alpha) = T_{\varphi(\alpha)}$, es decir, $T_\alpha \mapsto T_{\alpha'}$, esta aplicación es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Como se quiere extender a un isomorfismo entre \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' . Para cada $\alpha \in \Delta$ elijamos $E_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$ no nulo y también $E_{\alpha'} \mathfrak{g}'_{\alpha'}$ no nulo para cada $\alpha' \in \Delta'$ y dada esta elección, la extensión $\tilde{\varphi}$ de φ es el único isomorfismo tal que $\tilde{\varphi}(E_\alpha) = E_{\alpha'}$.

Esto concluye la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas por medio de los diagramas de Dynkin, puesto que por la Proposición 2.7.6, éste teorema vale para las álgebras de Lie semisimples complejas.

Conclusiones

Tanto en el proceso para clasificar los retículos de raíz como el de clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas, comenzamos sentando los conceptos fundamentales y la base teórica para poder entender tales procesos.

Concluimos que los procesos son en esencia idénticos pues tienen los mismos elementos:

- Identificar los sistemas de raíces que permiten en cierta manera codificar la información del objeto a clasificar.
- Elegir en estos sistemas de raíces un sistema adecuado, más sencillo en cuanto a elementos que represente la misma información que los sistemas originales, en ambos casos, fueron los sistemas fundamentales de raíces, donde los elementos indescomponibles en el capítulo 1, son los análogos idénticos a las raíces simples del capítulo 2. Para cada objeto se estudiaron los mismos aspectos de sus sistemas fundamentales correspondientes, lo que tiene que ver con los Lemas en retículos, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.6 y su contraparte en álgebras de Lie semisimples complejas, los Lemas 2.7.2 y 2.7.5.
- Asociar una matriz a estos sistemas fundamentales. Las matrices de Gram para los sistemas fundamentales de los retículos son matrices de Cartan y las matrices de Cartan se asemejan a las matrices de Gram, pues cada entrada es un múltiplo de la entrada correspondiente en la matriz de Gram.
- Los diagramas de Coxeter-Dynkin asociados a los retículos son en realidad diagramas de Dynkin en el mismo sentido que en las álgebras de Lie semisimples complejas

porque pudo escribirse la asignación del grafo exactamente de la misma manera y se obtendría el mismo diagrama.

- El siguiente paso para la clasificación en ambos casos fue estudiar los diagramas, cuáles eran los subobjetos que no tenían cabida y cuáles aspectos podían estar presentes en los diagramas, expresados en la primera parte por medio de los Lemas 1.2.8, 1.2.9 y un análisis sin rótulo posterior a ellos, su contraparte, los Lemas 2.7.10 y 2.7.11 y el análisis posterior respectivo.
- Para ambos casos, se exhibieron objetos a los que se les asigna cada posible diagrama en cada caso.
- Finalmente, se dieron teoremas de clasificación, enunciando de manera explícita la estructura del objeto como suma ortogonal de los subobjetos producidos por los diagramas conexos.

En el caso de las álgebras de Lie, tuvo que hacerse un poco más en este sentido porque a diferencia de los retículos de raíz (cuyo espacio ambiente es \mathbb{R}^n), las álgebras de Lie suelen concebirse como álgebras de matrices y los sistemas abstractos de raíces y los fundamentales, siempre habitaban en \mathbb{R}^n , luego era necesario hacer explícito que codifican y representan algo que no pertenece a este espacio ambiente, de manera adecuada y correcta.

En el trabajo se hizo claridad sobre algunas situaciones y conceptos en los que la bibliografía no ahonda, mostrando que hubo lectura y comprensión de la teoría y situaciones planteadas, concluyendo con el cumplimiento de los objetivos específicos planteados en el anteproyecto: el primero: ahondar en los conceptos relacionados con la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas y el segundo junto con el objetivo general del trabajo: realizar la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas y comparar el método para llevar a cabo dicha tarea, con el método de clasificación de los retículos de raíz por medio de diagramas de Coxeter-Dynkin.

Bibliografía

- [CS] J.H CONWAY, N.J.A SLOANE, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag - Third Edition (1999).
- [Ga] GALINA, E., *Conceptos básicos de álgebras de Lie*. Notas para un curso básico (2003).
- [Hu] HUMPHREYS, J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag 2nd Printing (1978).
- [J] JANCSA, P., *Álgebras de Lie*. Universidad Autónoma de Madrid(2010).
- [Ro] RODRÍGUEZ, M., *Álgebras de Lie*. Departamento de Física Teórica II, Facultad de Físicas. Universidad Complutense (2007).
- [Sa] SAMELSON, H., *Notes on Lie Algebras*. (1989).
- [Wi] WISSER, F., *Classification of complex and real semisimple Lie Algebras*. Tesis de Maestría, Universität Wien (2001).
- [WE] WOLFGANG EBELING, *Lattices and Codes*. Springer-Spektrum - Third Edition (2012).